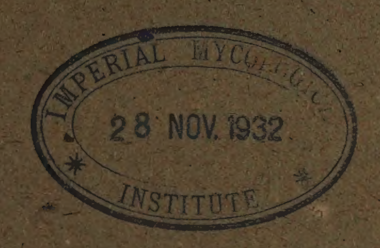
1932 № 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

А. М. Деборин. Проблема времени в освещении акад. Вернадского
ИМЕН, 1932, № 4, стр. 543.

A. Deborin. Le problème du temps traité par V. Vernadskij
BAS-MN, 1932, № 4, p. 543.

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Май 1932 г.

Непременный Секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор Г. А. Стратановский

Сдано в набор в марте 1932 г. — Подписано к печати 9 мая 1932 г.

175 (419—593) стр. (3 фиг.) — 72 × 110 см. — 11⁴/₈ печ. л. —
40 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2000
Ленгорлит № 39568. — АНИ № 144. — Заказ № 806
Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ КВАДРАТУР

В. А. ФОК

(Представлено академиком А. Н. Крыловым*)*

§ 1. **Введение.** Исследованию формул механических квадратур посвящено большое число работ, из которых отметим серию работ В. А. Стеклова, опубликованных в Известиях Российской Академии Наук (ныне Академия Наук СССР) за 1915—1918 гг. Большинство авторов стремилось к возможно большей общности предположений о характере интегрируемой функции и не предполагало эту функцию аналитической. Оценка остаточного члена основывалась на возможности приближенного представления ее в виде полинома, причем остаточный член выражался через ее производную достаточно высокого порядка для некоторого среднего значения ξ аргумента x в промежутке интеграции. Для практических применений такого рода оценка остаточного члена дает весьма мало, так как в нее входит неизвестное число ξ. Кроме того, в большинстве случаев чрезвычайно трудно, а подчас и невозможно, составить себе представление о порядке величины производной высокого порядка от заданной функции, если только она не аналитическая. В тех же случаях, когда эта производная меняется в пределах интеграции от $-\infty$ до $+\infty$, как это может случиться в случае бесконечных пределов, обычная форма остаточного члена не дает никаких указаний на величину погрешности.

Мы предложим себе исследовать остаточный член некоторых формул квадратур типа Гаусса (как для конечных, так и для бесконечных пределов) в предположении, что интегрируемая функция — аналитическая. Основной результат наш состоит в том, что порядок величины остаточного члена связан с величиной той области, в которой функция остается голоморфной, при чем для остаточного члена получается не только верхний предел, но

и приближенное его значение. В виду простоты результатов и самого способа исследования трудно думать, чтобы они были новыми; однако, нам не удалось найти в литературе никаких указаний по этому вопросу.

§ 2. **Идея способа.** Формула квадратур типа Гаусса может быть написаны в виде

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_n(x_k) f(x_k) + B_n, \tag{1}$$

где сумма представляет приближенное значение интеграла, а B_n есть остаточный член. Здесь x_k суть корни n-го полинома Чебышева $T_n(x)$, связанного с функцией $p(x)$ и определяѐмого из условия

$$\int_a^b p(x) x^l T_n(x)\, dx = 0; \qquad (l=0, 1, \ldots n-1). \tag{2}$$

Коэффициенты $A_n(x_k)$ формулы квадратур суть значения, при $z = x_k$, рациональной функции

$$A_n(z) = \frac{U_n(z)}{T'_n(z)}, \tag{3}$$

где $U_n(z)$ есть полином степени $n-1$

$$U_n(z) = \int_a^b p(x) \frac{T_n(z) - T_n(x)}{z - x}\, dx, \tag{4}$$

а $T'_n(z)$ есть производная от $T_n(z)$.

Предположим теперь, что функция $f(z)$ аналитическая. Мы можем тогда написать интеграл, подлежащий вычислению, в виде

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) f(z)\, dz, \tag{5}$$

где

$$F(z) = \int_a^b p(x) \frac{dx}{z - x}, \tag{6}$$

а C есть контур, охватывающий отрезок вещественной оси от $z = a$ до $z = b$, если эти числа конечны, и имеющий вид петли или параллельных прямых, если один или оба предела в (1) обращаются в бесконечность.

Функцию $F(z)$ мы можем написать в виде

$$F(z) = \frac{U_n(z)}{T_n(z)} + R_n(z), \tag{7}$$

где $U_n(z)$ имеет значение (4). Первый член здесь представляет n-ую подходящую дробь в разложении интеграла (6) в непрерывную дробь,* а $R_n(z)$ есть остаток, который равен

$$R_n(z) = \frac{1}{T_n(z)} \int\limits_a^b p(x) \frac{T_n(x)}{z-x} dx \tag{8}$$

или

$$R_n(z) = \frac{V_n(z)}{T_n(z)}, \tag{9}$$

где мы положили

$$V_n(z) = \int\limits_a^b p(x) \frac{T_n(x)}{z-x} dx. \tag{10}$$

Подставляя (7) в (5), получим

$$\int\limits_a^b p(x) f(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{U_n(z)}{T_n(z)} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C R_n(z) f(z) dz. \tag{11}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (1), мы убедимся, что первый член в (11) дает приближенное значение интеграла, получаемое по формуле квадратур Гаусса. Следовательно, остаточный член формулы квадратур равен

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C R_n(z) f(z) dz. \tag{12}$$

Для оценки остаточного члена B_n нужно получить приближенное выражение для $R_n(z)$. Это можно сделать, в частных случаях, без особого труда, найдя асимптотические выражения для $V_n(z)$ и $T_n(z)$, справедливые при больших значениях n. Имея же асимптотическое выражение для $R_n(z)$, получим по формуле (12) приближенную величину остатка. Для более грубой оценки его можно поступать следующим образом. Выберем контур C так,

* А. А. Марков. Исчисление конечных разностей, Одесса, 1910.

чтобы модуль $R_n(z)$ оставался на нем приближенно постоянным. Этот контур будет зависеть от одного параметра, который мы обозначим через r. Если мы обозначим через $M(r)$ максимум модуля $f(z)$ на контуре C, то мы будем иметь

$$|B_n| \leqslant M(r) L_n(r), \tag{13}$$

где

$$L_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int |R_n(z)| \cdot |dz|. \tag{14}$$

В правой части (13) мы можем выбрать r так, чтобы она обратилась в минимум. Этот минимум и даст верхний предел остаточного члена.

В следующих параграфах мы займемся применением изложенного метода к ряду частных случаев.

§ 3. **Полиномы, наименее отклоняющиеся от нуля.** В качестве простейшего примера рассмотрим случай

$$a = -1; \quad b = 1; \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1}$$

В этом случае мы можем положить

$$T_n(z) = \cos(n \cdot \arccos x), \tag{2}$$

так что T_n будут только множителем отличаться от полиномов Чебышева, наименее отклоняющихся от нуля в промежутке от -1 до $+1$. Рациональная функция $A_n(z)$ [формула (3, § 2)] приведется к постоянной, равной $\frac{\pi}{n}$, так что формула квадратур напишется

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\, dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) + B_n, \tag{3}$$

где

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}. \tag{4}$$

В рассматриваемом случае выражение для остаточного члена $R_n(z)$ особенно просто. Чтобы написать его в более удобном виде, положим

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \tag{5}$$

при чем будем разуметь под ζ тот корень уравнения (5), модуль которого больше единицы:

$$|\zeta| > 1. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (2), получим для $T_n(z)$ выражение

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left(\zeta^n + \frac{1}{\zeta^n}\right). \tag{7}$$

Полагая же в (10, § 2) $x = \cos\varphi$, будем иметь

$$V_n(z) = \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi \, d\varphi}{\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - \cos\varphi}. \tag{8}$$

При условии (6) этот интеграл равен

$$V_n(z) = \frac{2\pi}{\zeta^2 - 1} \cdot \zeta^{-n+1}. \tag{9}$$

Таким образом,

$$R_n(z) = \frac{4\pi\zeta^{-2n+1}}{\zeta^2 - 1} \cdot \frac{1}{1 + \zeta^{-2n}}. \tag{10}$$

Нас интересует значение остаточного члена при больших значениях n. В этом случае второй множитель в (10) будет, в силу условия (6), мало отличаться от единицы, и мы можем написать

$$R_n(z) = \frac{4\pi\zeta^{-2n+1}}{\zeta^2 - 1} \cdot (1 + \delta_n), \tag{11}$$

где

$$\delta_n = -\frac{1}{\zeta^{2n} + 1}. \tag{12}$$

Модуль $R_n(z)$ остается приблизительно постоянным на круге

$$|\zeta| = r > 1, \tag{13}$$

который мы обозначим через Г. Когда переменная ζ описывает в положительном направлении круг Г, переменная z описывает, в том же направлении, эллипс с фокусами в точках $z = -1$ и $z = +1$ и с полуосями

$$a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right); \quad b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \tag{14}$$

(см. фиг. 1).

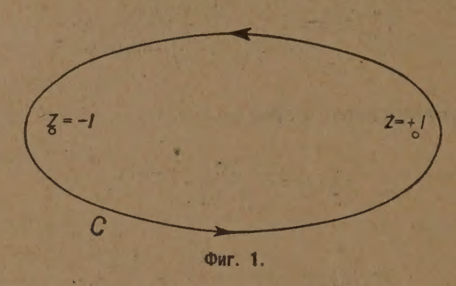
Так как мы имеем

$$R_n(z)\,dz = 2\pi\zeta^{-2n-1}\cdot(1+\delta_n)\,d\zeta, \tag{15}$$

то приближенное выражение остаточного члена формулы квадратур (3) будет

$$B_n \simeq -i\int_\Gamma f\left(\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\right)\frac{d\zeta}{\zeta^{2n+1}}, \tag{16}$$

а точное выражение получится, если добавить в (16) под интегралом множитель $1+\delta_n$.



Фиг. 1.

Если мы обозначим через a_k коэффициенты разложения $f(\cos\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(\cos\varphi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos k\varphi, \tag{17}$$

то из наших формул следует, что остаточный член B_n будет равен

$$B_n = \pi(a_{2n} - a_{4n} + a_{6n} - \ldots), \tag{18}$$

а приближенное выражение его (16) будет равно

$$B_n \simeq \pi a_{2n}. \tag{19}$$

Легко показать непосредственно, что точная формула (18) верна для какой-угодно функции $f(x)$, допускающей разложение в ряд Фурье, а не только для аналитической функции.

Переходя к оценке остаточного члена, обозначим через $M(r)$ максимум модуля $f(z)$ на эллипсе C и через $\delta_n{}^0$ максимум модуля δ_n, который равен

$$\delta_n{}^0 = \frac{1}{r^{2n}-1}. \tag{20}$$

Мы будем иметь

$$|B_n| < 2\pi M(r) r^{-2n} (1 + \delta_n^{\circ}). \tag{21}$$

Как мы уже указывали в конце § 2, число r нужно выбирать так, чтобы выражение в правой части (21) получилось возможно меньшим. Если наименьший из софокусных эллипсов, достигающий особенной точки функции $f(z)$, характеризуется суммой полуосей r_0, то выгодно брать r близким к r_0. В таком случае погрешность формулы квадратур будет порядка, близкого к r_0^{-2n}. Если $f(z)$ есть целая трансцендентная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z)| < Ke^{p|z|}, \tag{22}$$

то в качестве $M(r)$ можно взять величину

$$M(r) = K' e^{\frac{pr}{2}}. \tag{23}$$

В таком случае выгодно взять $r = \frac{4n}{p}$, и величина B будет порядка, близкого к

$$\left(\frac{pe}{4n}\right)^{2n}. \tag{24}$$

Если, наконец, $f(z)$ есть полином степени $k \leqslant 2n - 1$, то $M(r)$ будет порядка r^k, и увеличивая в формуле (21) r до бесконечности, получим в пределе нуль. Это значит, что наша формула квадратур является точной для полинома степени не выше $2n - 1$.

В заключение этого параграфа рассмотрим один пример. Положим

$$f(z) = e^{pz}. \tag{25}$$

Формула квадратур напишется

$$I_0(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} e^{px} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{p \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)} + B_n. \tag{26}$$

Точное выражение остаточного члена B_n будет, на основании (18),

$$B_n = 2I_{2n}(p) - 2I_{4n}(p) + 2I_{6n}(p) - \ldots \tag{27}$$

В этих формулах

$$I_k(p) = (-i)^k J_k(ip) \tag{28}$$

суть Бесселевы функции от мнимого аргумента. Считая n весьма большим и отбрасывая члены порядка $\frac{p^2}{4n}$, получаем приближенное равенство

$$B_n \simeq \frac{2}{(2n)!} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{2n} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{pe}{4n}\right)^{2n}, \tag{29}$$

в согласии с (24). Если в точной формуле (27) положить $n = 1$, она приводится к известному соотношению между Бесселевыми функциями.

§ 4. **Полиномы Лежандра.** Рассмотрим теперь обыкновенную формулу квадратур Гаусса

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_n(x_k) f(x_k) + B_n, \tag{1}$$

соответствующую случаю

$$a = -1;\ b = 1;\ p(x) = 1. \tag{2}$$

Здесь x_k суть корни полиномов Лежандра $P_n(x)$, так что мы можем положить

$$T_n(z) = P_n(z). \tag{3}$$

Функция $V_n(z)$, стоящая в числителе дроби в выражении (9, § 2) для остатка $R_n(z)$, равна

$$V_n(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\,dx}{z - x}. \tag{4}$$

Если мы воспользуемся известным выражением для полинома Лежандра в виде производной

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{5}$$

и проинтегрируем в (4) n раз по частям, мы получим

$$V_n(z) = \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - x^2)^n}{(z - x)^{n+1}}\,dx. \tag{6}$$

Положим здесь, как и в предыдущем параграфе,

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \tag{7}$$

причем будем попрежнему считать $|\zeta| > 1$. Выражение (6) напишется

$$V_n(z) = \frac{2}{\zeta^{n+1}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - x^2)^n \, dx}{\left(1 - \frac{2x}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}\right)^{n+1}}. \tag{8}$$

Производя теперь подстановку

$$\frac{1 - x^2}{1 - \frac{2x}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}} = 1 - t^2; \quad \frac{dx}{1 - \frac{2x}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}} = \frac{\zeta dt}{\sqrt{\zeta^2 - 1 + t^2}}, \tag{9}$$

мы получим

$$V_n(z) = \frac{2}{\zeta^n} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - t^2)^n \, dt}{\sqrt{\zeta^2 - 1 + t^2}}. \tag{10}$$

Разлагая здесь корень квадратный по степеням t^2, мы получим равенство, которое можно записать в виде

$$V_n(z) = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\zeta^{n+1}\sqrt{1 - \frac{1}{\zeta^2}}} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{1 - \zeta^2}\right), \tag{11}$$

где F знак гипергеометрического ряда. На основании формулы (10) нетрудно видеть, что это равенство, которое является точным при $|\zeta^2 - 1| \geqslant 1$, будет асимптотическим, если $|\zeta^2 - 1| < 1$, при условии

$$n \cdot |\zeta^2 - 1| \gg 1. \tag{12}$$

Не останавливаясь на выводе известного асимптотического выражения для полиномов Лежандра $P_n(z)$, заметим, что оно может быть получено из равенства

$$P_n(z) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)} \cdot \zeta^n \cdot F\left(\frac{1}{2}, -n, \frac{1}{2} - n, \frac{1}{\zeta^2}\right) \tag{13}$$

на основании известных формул для аналитического продолжения гипергеометрической функции. Эти формулы приводят к следующим двум выражениям для $P_n(z)$:

$$P_n(z) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\zeta^n}{\sqrt{1-\frac{1}{\zeta^2}}} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}-n, \quad \frac{1}{1-\zeta^2}\right) \tag{14}$$

и

$$P_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\zeta^n}{\sqrt{1-\frac{1}{\zeta^2}}} \cdot$$
$$\cdot \left\{F\left(\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad n+\frac{3}{2}, \quad \frac{\zeta^2}{\zeta^2-1}\right) + \frac{(-1)^n}{(-\zeta^2)^{n+\frac{1}{2}}} F\left(\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad n+\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{1-\zeta^2}\right)\right\} \cdot \tag{15}$$

Ряды в правых частях равенств (14) и (15) можно рассматривать как асимптотические ряды, которыми можно пользоваться при условии

$$n \cdot \left|1 - \frac{1}{\zeta^2}\right| \gg 1. \tag{16}$$

Из наших формул видно, что при больших n величина $R_n(z)$ будет вида

$$R_n(z) = \frac{2\pi}{\zeta^{2n+1}} \cdot (1+\delta_n), \tag{17}$$

причем δ_n будет, при $|\zeta| = r > 1$, удовлетворять неравенству

$$|\delta_n| \leqslant \max|\delta_n| = \delta_n^0(r), \tag{18}$$

где $\delta_n^0(r)$ есть величина порядка

$$\delta_n^0(r) = 0\left(\frac{r^2}{n(r^2-1)}\right). \tag{19}$$

Таким образом, величина δ_n будет, на всем пути интеграции в (12, § 2), малой величиной, стремящейся к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

На основании формулы (12, § 2), приближенное выражение остаточного члена формулы квадратур Гаусса будет

$$B_n \cong -\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} f\left(\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\right)\cdot\frac{1}{\zeta^{2n+1}}\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)d\zeta \tag{20}$$

или

$$B_n \cong \frac{\pi}{2}(a_{2n}-a_{2n+2}), \tag{21}$$

где через a_k попрежнему обозначены коэффициенты разложения функции $f(\cos\varphi)$ в ряд Фурье [формула (17, § 3)].

Для верхнего предела остаточного члена можно установить неравенство

$$|B_n| < 2\pi M(r)\, r^{-2n}\left[1+\delta_n{}^{\circ}(r)\right] \tag{22}$$

где r и $M(r)$ имеют то же значение, что в формуле (21, § 3). Отсюда видно, что остаточный член формулы квадратур (1) будет, вообще говоря, того же порядка, как и для формулы (3, § 3).

Результаты, полученные в §§ 3 и 4, легко обобщаются на формулы квадратур вида

$$\int\limits_{-1}^{+1}(1+x)^p(1-x)^q f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}A_n(x_k)f(x_k)+B_n. \tag{23}$$

В этом случае полиномы Чебышева приводятся, как известно, к полиномам Якоби. Остаток $R_n(z)$ будет равен

$$R_n(z)=\frac{2\pi}{2^{p+q}}\cdot\frac{(\zeta+1)^{2p}(\zeta-1)^{2q}}{\zeta^{2n+2p+2q+1}}\cdot(1+\delta_n). \tag{24}$$

При $p=q=-\frac{1}{2}$ и при $p=q=0$ это выражение приводится соответственно к (11, § 3) и к (17, § 4).

§ 5. Обобщенные полиномы Лагерра. Если мы положим в нашей общей формуле (1, § 2)

$$a=0;\ b=\infty;\ p(x)=x^s e^{-x}, \tag{1}$$

она примет вид

$$\int_0^\infty x^s e^{-x} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_n(x_k) f(x_k) + B_n. \tag{2}$$

В этом случае x_k суть корни обобщенных полиномов Лагерра, которые можно определить равенством

$$Q_n^s(x) = \frac{e^x}{x^s} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{s+n}), \tag{3}$$

так что мы можем положить

$$T_n(x) = Q_n^s(x). \tag{4}$$

Формула (5, § 2) напишется в нашем случае

$$\int_0^\infty x^s e^{-x} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int F(z) f(z)\,dz, \tag{5}$$

где функция $F(z)$ равна

$$F(z) = \int_0^\infty x^s e^{-x} \frac{dx}{z-x}. \tag{6}$$

Контур интеграции в формуле (5) мы можем выбрать следующим образом (см. ниже фиг. 2).

Этот контур будет состоять из двух частей C_1 и C_2. Участок C_1 есть петля вокруг начала координат, замыкающаяся на достаточно большом расстоянии от начала. Этой петле удобно придать форму эллипса с фокусами в точках $z=0$ и $z=4n$ (где n есть число ординат в формуле квадратур), причем эллипс следует взять достаточно большим, чтобы все корни полинома $Q^s{}_n(x)$ попали внутрь него.* Участок C_2 есть отрезок вещественной оси от точки пересечения ее с эллипсом ($z=x_0$) до бесконечности. Этот участок пробегается два раза в противоположных направлениях.

* Все корни полинома $Q^s{}_n(x)$ меньше числа $4n+2s+1$.

Так как при

$$Re(z) = x > 0$$

мы имеем

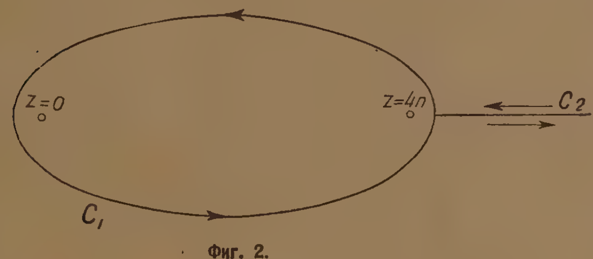
$$\lim_{y \to +0} [F(x+iy) - F(x-iy)] = -2\pi i x^s e^{-x}, \tag{7}$$

то интеграл (5), взятый по участку C_2, будет равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} F(z) f(z)\, dz = \int_{x_0}^{\infty} x^s e^{-x} f(x)\, dx \tag{8}$$

и, следовательно, весь интеграл будет

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} F(z) f(z)\, dz + \int_{x_0}^{\infty} x^s e^{-x} f(x)\, dx. \tag{9}$$



Фиг. 2.

Указанным выбором контура исчерпывается вопрос о сходимости интеграла в правой части (5) на бесконечности, так как исходный интеграл в левой части (2) мы, разумеется, предполагаем сходящимся.

Составим теперь числитель $V_n(z)$ в выражении (9, § 2) для $R_n(z)$. По общей формуле (10, § 2) мы имеем

$$V_n(z) = \int_0^{\infty} t^s e^{-t} \frac{Q^s{}_n(t)}{z-t}\, dt. \tag{10}$$

Пользуясь выражением для $Q_n{}^s(t)$ в виде производной и интегрируя n раз по частям, получим

$$V_n(z) = -n! \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^{n+s}}{(t-z)^{n+1}}\, dt. \tag{11}$$

С другой стороны, по формуле Коши для производной порядка n имеем

$$Q_n^s(z) = \frac{e^z}{z^s} \frac{n!}{2\pi i} \int e^{-t} \frac{t^{n+s}}{(t-z)^{n+1}} dt, \tag{12}$$

где интегрирование ведется по замкнутому контуру вокруг точки $t = z$.

Нам нужно получить для интегралов (11) и (12) асимптотические выражения, которые, при больших значениях n, были бы справедливы равномерно на всем контуре C_1. Это нетрудно сделать, если воспользоваться известным способом «стационарной фазы».*

Применяя этот способ, полагаем

$$e^{-t} \frac{t^n}{(t-z)^n} = e^{\varphi(t)} \tag{13}$$

и приравниваем нулю производную от функции $\varphi(t)$:

$$\varphi'(t) = -1 + \frac{n}{t} - \frac{n}{t-z} = 0. \tag{14}$$

Для t получаются два значения

$$t = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} - nz}. \tag{15}$$

Чтобы освободиться от квадратных корней, положим

$$z = -\frac{n}{w}(1-w)^2, \tag{16}$$

причем будем разуметь под w тот корень уравнения (16), который по модулю меньше единицы. Уравнение это можно написать в виде

$$\frac{1+w}{1-w} = \sqrt{1 - \frac{4n}{z}}, \tag{17}$$

причем условие $|w| < 1$ приведется к требованию, чтобы вещественная часть корня квадратного была положительной. Так как мы не будем рас-

* См. напр. П. А. Некрасов. Исчисление приближенных выражений от функции весьма больших чисел. Москва, 1900; также R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, I, p. 435. Berlin, 1924.

сматривать вещественных значений z, лежащих между 0 и $4n$, то это требование определяет однозначно значение w. Корни производной $\varphi'(t)$, выраженные через w, будут равны

$$t_1 = n - nw; \quad t_2 = n - \frac{n}{w}. \tag{18}$$

Соответствующие значения второй производной будут

$$\varphi''(t_1) = -\frac{1}{n}\frac{1+w}{1-w}; \quad \varphi''(t_2) = \frac{1}{n}\frac{1+w}{1-w}. \tag{19}$$

Так как $|w| < 1$, то вещественная часть $\varphi''(t_1)$ будет отрицательна, а для $\varphi''(t_2)$ она положительна. В интеграле (11) мы можем провести путь интеграции через точку $t = t_1$, а в интеграле (12) через точку $t = t_2$.

Рассмотрим подробнее интеграл (11). Мы можем произвести в нем подстановку

$$t = n(1-w)(1+u) \tag{20}$$

и интегрировать по u от -1 до $+\infty$. Мы получим

$$-\frac{V_n(z)}{n!} = n^s(1-w)^s w^{n+1} e^{-n+nw} \cdot K, \tag{21}$$

где

$$K = \int_{-1}^{\infty} e^{-n(1-w)u} \frac{(1+u)^{n+s}}{(1+wu)^{n+1}} du. \tag{22}$$

В интеграле K модуль подъинтегральной функции имеет резкий максимум вблизи $u = 0$, так что почти все значение интеграла обусловлено небольшим участком пути интеграции вблизи $u = 0$. На этом и основан способ «стационарной фазы». Подъинтегральную функцию в интеграле K мы полагаем равной

$$e^{-n(1-w)u} \frac{(1+u)^{n+s}}{(1+wu)^{n+1}} = e^{-\frac{n}{2}(1-w^2)u^2} \cdot f(u) \tag{23}$$

и пишем его в виде

$$K = \int e^{-\frac{n}{2}(1-w^2)u^2} f(u)\, du. \tag{24}$$

Здесь мы можем разложить $f(u)$ по степеням u и проинтегрировать почленно в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Располагая полученный результат по обратным степеням n, мы можем написать его в виде

$$K \cong \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n(1-w^2)}} \cdot \left\{1 + \sum_k \frac{\rho_{4k}(w)}{n^k(1-w)^k(1+w)^{3k}}\right\}, \tag{25}$$

где $\rho_{4k}(w)$ есть полином степени $4k$ от w. Полученный формальный ряд и дает искомое асимптотическое разложение для интеграла K, а следовательно и для функции $V_n(z)$.

Таким образом, мы будем иметь

$$-\frac{V_n(z)}{n!} \cong \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n(1-w^2)}} n^s(1-w)^s w^{n+1} e^{-n+nw} \cdot (1+\delta_n(w)), \tag{26}$$

где

$$\delta_n(w) \cong \sum_k \frac{\rho_{4k}(w)}{n^k(1-w)^k(1+w)^{3k}} \cdot \tag{27}$$

Чтобы получить асимптотическое выражение для $Q_n^s(z)$, заметим, что интеграл

$$\frac{2\pi i z^s e^{-z} Q_n^s(z)}{n!} = \int e^{-t} \frac{t^{n+s}\, dt}{(t-z)^{n+1}} \tag{28}$$

отличается от интеграла для $-\frac{V_n(z)}{n!}$ только выбором пути интеграции. В интеграле (28) путь должен проходить, как мы знаем, через точку

$$t_2 = n - \frac{n}{w} \cdot$$

Нетрудно видеть, что асимптотическое выражение для (28) получится из (26) заменой w на $\frac{1}{w}$. Выбирая надлежащим образом значения многозначных функций $\sqrt{1-w^2}$ и $(1+w)^s$, будем иметь

$$\frac{2\pi(-z)^s e^{-z} Q_n^s(z)}{n!} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n(1-w^2)}} \cdot \frac{n^s(1-w)^s}{w^{n+s}} \cdot e^{-n+\frac{n}{w}} \cdot \left(1+\delta_n\left(\frac{1}{w}\right)\right), \tag{29}$$

откуда

$$\frac{2\pi Q_n^s(z)}{n!} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n(1-w^2)}} \cdot \frac{e^{n(1-w)}}{(1-w)^s w^n} \cdot \left(1+\delta_n\left(\frac{1}{w}\right)\right) \cdot \tag{30}$$

Формулы (26) и (30) дают следующее выражение для $R_n(z)$:

$$R_n(z) = \frac{V_n(z)}{Q^s{}_n(z)} = -2\pi n^s e^{-2n}(1-w)^{2s} w^{2n+1} e^{2nw} \cdot (1+\delta'_n), \quad (31)$$

где δ'_n есть величина порядка

$$\delta'_n = 0\left(\frac{1}{n|1-w| \cdot |1+w|^3}\right). \quad (32)$$

Из (32) видно, что выражение (31) справедливо равномерно на всем контуре C_1.

Заметим, что если в выражении (31) отбросить остаток δ'_n, то оно будет представлять однозначную и непрерывную функцию, тогда как $R_n(z)$, при $x > 0$, терпит разрыв, который равен

$$\lim_{y \to +0} [R_n(x+iy) - R_n(x-iy)] = -2\pi i x^s e^{-x}. \quad (33)$$

Это кажущееся противоречие объясняется тем, что непрерывная часть $R_n(z)$ при больших n весьма велика по сравнению с той частью, которая терпит разрыв.

Подставляя найденное асимптотическое выражение для $R_n(z)$ в общую формулу (12, § 2), получим для главной части остаточного члена формулы квадратур выражение

$$B_n \simeq i n^{s+1} e^{-2n} \int_\Gamma (1-w)^{2s} w^{2n-1} e^{2nw} (1-w^2) f\left(-\frac{n}{w}(1-w^2)\right) dw, \quad (34)$$

где в качестве контура Г можно взять круг радиуса $|w| < 1$, пробегаемый в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

При помощи (34), (32) и (9) можно найти и верхний предел остаточного члена, но мы на этом останавливаться не будем.

Если $f(z)$ есть целая трансцендентная функция, то порядок величины остаточного члена B_n зависит от поведения функции на бесконечности. Если же $f(z)$ имеет особую точку $z = z_0$ на конечном расстоянии, то порядок величины для B_n будет приблизительно тот же, как и для $R_n(z_0)$. Например, если

$$f(z) = \frac{1}{z_0 - z}, \quad (35)$$

то мы будем просто иметь

$$B_n = R_n(z_0). \tag{36}$$

Если же функция $f(z)$ не равна (35), но «ближайшая»* к положительной вещественной оси особая точка ее имеет вид (35), то равенство (36) будет хотя и не строго точным, но будет выполняться с большой степенью приближения (см. пример Бертрана в § 6). В виду этого, представляет интерес найти приближенное выражение для $R_n(z)$, справедливое при конечных z и бесконечно возрастающих n. Это нетрудно сделать на основании выведенного нами более общего выражения (31). Припоминая связь (16) и (17) между w и z и считая $\frac{z}{n}$ малым и следовательно w близким к единице, мы будем иметь

$$R_n(z) = -2\pi(-z)^s e^{-z-4\sqrt{-zn}}(1+\delta_n^*), \tag{37}$$

где

$$\delta_n^* = 0\left(\frac{|z|^2+1}{2\left|\sqrt{nz}\right|}\right). \tag{38}$$

Отсюда следует, что порядок величины остаточного члена B_n будет обусловлен той особой точкой z_0 функции $f(z)$, для которой вещественная часть $\sqrt{-z_0}$ (предполагаемая положительной) будет наименьшей. Эту особую точку и следует считать «ближайшей» к положительной вещественной оси. Если мы положим

$$z_0 = (\xi + i\eta)^2; \quad \sqrt{-z_0} = \eta - i\xi; \quad (\eta > 0) \tag{39}$$

то остаточный член B_n будет относительно n порядка

$$e^{-4\eta\sqrt{n}}. \tag{40}$$

Чтобы составить себе представление о порядке величины B_n для целой трансцендентной функции $f(z)$, рассмотрим один пример. Положим

$$s = 0; \quad f(z) = e^{(1-\gamma)z}; \qquad [Re(\gamma) > 0]. \tag{41}$$

* Точный смысл слова «ближайшая» мы выясним ниже.

В этом случае интеграл (34) выражается через Бесселевы функции, а именно

$$B_n \cong 2\pi n e^{-2n\gamma}\left\{\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^n J_{2n}\left(2n\sqrt{1-\gamma^2}\right)-\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{n+1} J_{2n+2}\left(2n\sqrt{1-\gamma^2}\right)\right\}. \quad (42)$$

Если воспользоваться известным асимптотическим выражением для Бесселевых функций,* то для B_n получается более простое выражение

$$B_n \cong 4\sqrt{\pi n\gamma}\,\frac{(1-\gamma)^{2n}}{(1+\gamma)^{2n+2}}, \quad (43)$$

справедливое с той же степенью приближения, как и (42).

Для той же показательной функции (41), но для случая $s \neq 0$, можно вывести аналогичное приближенное равенство

$$B_n \cong \sqrt{\pi n\gamma}\left(\frac{2}{1+\gamma}\right)^{2s+2}\cdot\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{2n}. \quad (44)$$

Так как вещественная часть γ положительна, то в формулах (43) и (44)

$$\left|\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right| < 1. \quad (45)$$

Когда γ близко к единице, величина B_n будет порядка $2n$ относительно $1-\gamma$, как это и следовало ожидать.

Таким образом, здесь главная часть логарифма остаточного члена пропорциональна n, тогда как для функции с особенной точкой на конечном расстоянии она была пропорциональна $\sqrt{n}$.

§ **6. Численные примеры.** Помня слова Ньютона «In scientiis addiscendis exempla non minus docent quam praecepta»,** мы разберем в дальнейшем ряд численных примеров, иллюстрирующих возможность применения наших формул на практике. Для простоты мы ограничимся формулами квадратур, рассмотренными в §§ 3 и 4 и соответствующими случаю конечных пределов.*** Так как остаточный член приближенно выражается через коэффици-

* Watson. Theory of Bessel Functions. Cambridge, 1922.

** При изучении наук примеры не меньшему научают, нежели правила.

*** Числовая часть большинства примеров взята нами из литературы. Так как для бесконечных пределов в литературе нет числовых данных, то для этого случая пришлось бы определить, с большим числом знаков, корни полиномов $Q_p^s(x)$ и проделать ряд других довольно утомительных вычислений; поэтому мы и не рассматриваем примеров на бесконечные пределы.

енты Фурье, то дело сводится к приближенному определению этих коэффициентов. Во многих случаях это можно сделать без особого труда, воспользовавшись тем, что число n предполагается большим.

В качестве простейшего примера рассмотрим интеграл

$$S=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\lg 2=0.69314718056\ldots \tag{1}$$

Чтобы сделать пределы равными -1 и $+1$, полагаем

$$x=\frac{1-t}{2}, \tag{2}$$

после чего интеграл примет вид

$$S=\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{3-t}. \tag{3}$$

Этот интеграл есть нечто иное, как значение функции $F(z)$ формул (6, § 2) и (7, § 2) при $z=3$. При этом дробь $\frac{U_n}{T_n}$ представляет приближенное значение интеграла, получаемое по формуле квадратур Гаусса, а R_n есть остаток, так что в нашем случае

$$B_n=R_n(3). \tag{4}$$

По формуле (7, § 4) значению $z=3$ соответствует значение

$$\zeta=3+\sqrt{8}. \tag{5}$$

По формуле (17, § 4) мы имеем

$$B_n \simeq \frac{2\pi}{(3+\sqrt{8})^{2n+1}}. \tag{6}$$

Если бы мы вместо (15, § 4) воспользовались выражением (14, § 4) для полинома Лежандра, мы получили бы для $R_n(z)$ несколько более точное выражение

$$R_n(z)=\frac{2\pi\alpha_n}{\zeta^{2n+1}}, \tag{7}$$

где

$$\alpha_n = \frac{\Gamma^2(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \tag{8}$$

есть множитель, стремящийся к единице при возрастании n. Погрешность выражения (7) будет порядка

$$\frac{1}{n\,|\zeta^2-1|}, \tag{9}$$

т. е. она будет примерно в $|\zeta|^2$ раз меньше погрешности более простого выражения

$$R_n(z) = \frac{2\pi}{\zeta^{2n+1}}. \tag{10}$$

Таким образом, в нашем примере

$$B_n \simeq B_n^0 = \frac{2\pi\alpha_n}{(3+\sqrt{8})^{2n+1}}. \tag{11}$$

Мы приводим ниже таблицу приближенных значений интеграла S, получаемых с числом ординат $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, а также истинных и приближенных значений остаточного члена

n	S_n	B_n	B_n^0
1	$\frac{2}{3} = 0.66666$	0.02648	0.02695
2	$\frac{9}{13} = 0.692307692$	0.000839488	0.0008466
3	$\frac{131}{189} = 0.693121693$	0.000025488	0.00002561
4	$\frac{1335}{1926} = 0.6931464174$	0.0000007632	0.0000007658
5	$\frac{34997}{50490} = 0.69314715785$	0.00000002271	0.00000002277
6	$\frac{560763}{809010} = 0.6931471798865$	0.000000000673	0.000000000675

Мы видим, что формула (11) дает для остаточного члена не только правильный порядок величины, но и два верных знака.

Чтобы судить о влиянии поправочного множителя α_n, мы приведем ниже таблицу обыкновенных логарифмов величины $\frac{1}{\alpha_n}$, а также значений самой этой величины

n	$\log\frac{1}{\alpha_n}$	$\frac{1}{\alpha_n}$
1	0.0712	1.178
2	0.0432	1.105
3	0.0309	1.074
4	0.0241	1.057
5	0.0197	1.046
6	0.0167	1.039

Перейдем к следующему примеру. Положим

$$S=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}=0.785398163\ldots \tag{12}$$

Производя подстановку (2) и разлагая под интегралом на простейшие дроби, будем иметь

$$S=\frac{1}{2i}\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{1-2i-t}-\frac{1}{2i}\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{1+2i-t}. \tag{13}$$

Подобно тому, как это мы делали в предыдущем примере, заключаем, что остаточный член равен

$$B_n=\frac{1}{2i}R_n(1-2i)-\frac{1}{2i}R_n(1+2i). \tag{14}$$

Решая уравнение

$$1+2i=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right), \tag{15}$$

получаем

$$\zeta=1.910+i4.198=re^{i\varphi}, \tag{16}$$

где

$$r=4.612;\quad \log r=0.6639;\quad \varphi=65^\circ 32'. \tag{16*}$$

Пользуясь выражением (7) для $R_n(z)$, будем иметь

$$B_n\cong B_n^0=\frac{\pi\alpha_n}{r^{2n+1}}\cdot\sin(2n+1)\varphi. \tag{17}$$

Таким образом, здесь остаточный член может быть того или другого знака, в зависимости от числа n.

Вычисляем интеграл (12) по формуле Гаусса с четырьмя ординатами. Обозначая через x_k абсциссы и через A_k' коэффициенты формулы Гаусса, мы имеем, для $n=4$

k	x_k	A_k'	$\frac{A_k'}{1+x_k^2}$
1	0.06943184	0.17392742	0.1730930
2	0.33000948	0.32607258	0.2940489
3	0.66999052	0.32607258	0.2250504
4	0.93056816	0.17392742	0.0932109
			0.7854032

Таким образом, остаточный член здесь равен

$$B_4 = -0.0000050,$$

тогда как формула (17) дает

$$B_4^0 = -0.00000484.$$

Совпадение и здесь весьма близкое, тем более, что за последний знак в B_4 ручаться нельзя.

Рассмотрим теперь пример, разобранный Бертраном в его курсе интегрального исчисления,* а именно

$$S = \int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\lg 2 = 0.272198261287950\ldots \qquad (18)$$

Этот пример интересен в том отношении, что на нем удобно иллюстрировать некоторый общий прием, который может служить для оценки остаточного члена. Прием этот основан на выделении особенных точек подъинтегральной функции и представляет видоизменение указанного Лапласом способа оценки далеких членов ряда Тэйлора.

Особенными точками являются в данном случае $x=-1$ и $x=\pm i$. Как мы видели при рассмотрении предыдущих примеров, точке $x=-1$ соответствует значение ζ, равное по модулю

$$|\zeta_1| = 3+\sqrt{8} = 5.82843,$$

* J. Bertrand. Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Calcul intégral, p. 344. Paris, 1870.

а точкам $x = \pm i$ значение

$$|\zeta_2| = 4.612.$$

Значение остаточного члена обусловлено, главным образом, ближайшей особенной точкой (в плоскости ζ), т. е. точкой $\zeta = \zeta_2$ или $x = \pm i$. Если мы положим

$$\frac{\lg(1+x)}{1+x^2} = f_1(x) + f_2(x), \tag{19}$$

где

$$f_1(x) = \frac{\lg(1+i)}{2i} \cdot \frac{1}{x-i} - \frac{\lg(1-i)}{2i} \cdot \frac{1}{x+i}, \tag{20}$$

то $f_2(x)$ будет голоморфна в точках $x = \pm i$, и остаточный член будет приблизительно тот же, как для интеграла

$$S' = \int_0^1 f_1(x)\,dx \tag{21}$$

который подставкой (2) приводится к виду

$$S' = \frac{\lg(1+i)}{2i} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{1-2i-t} - \frac{\lg(1-i)}{2i} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{1+2i-t}. \tag{22}$$

На основании результатов предыдущего примера мы можем утверждать, что остаточный член интеграла (22) будет равен

$$B_n' = \frac{\lg(1+i)}{2i} R_n(1-2i) - \frac{\lg(1-i)}{2i} R_n(1+2i). \tag{23}$$

Это выражение, а значит и остаточный член исходного интеграла (18) будет мало отличаться от

$$B_n^0 = \frac{\pi\alpha_n}{r^{2n+1}} \left[\frac{\pi}{2}\cos(2n+1)\varphi + \lg 2 \sin(2n+1)\varphi\right], \tag{24}$$

где r и φ имеют прежние значения (16*).

Вычислим теперь значение интеграла (18) по формулам Гаусса с 4 и 5 ординатами. Выписывая значения величин

$$\frac{A_k \lg(1+x_k)}{1+x_k^2},$$

мы получаем следующую таблицу:

$n=4$	$n=5$
0.0116193	0.00541880
0.0838586	0.04717801
0.1154099	0.09226584
0.0613154	0.08578132
	0.04155404
$S_4=0.2722032$	$S_5=0.27219801$

Сравнивая эти числа с точным значением интеграла (18) и вычисляя, с другой стороны, значения B_4^0 и B_5^0 по формуле (24), получаем нижеследующую таблицу:

n	B_n	B_n^0
4	-0.0000048	-0.00000496
5	$+0.00000025$	$+0,000000233$

Совпадение и здесь весьма близкое.

§ 7. **Численные примеры (продолжение).** Рассмотрим теперь полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Этот пример интересен тем, что подъинтегральная функция имеет алгебраическую особенную точку.

Полный эллиптический интеграл первого рода равен

$$F=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1}$$

Применяя формулу квадратур, рассмотренную в § 3, мы должны положить

$$f(z)=\frac{1}{2\sqrt{1-k^2z^2}}. \tag{2}$$

Особенные точки здесь будут

$$z=\pm\frac{1}{k}. \tag{3}$$

После подстановки (5, § 3)

$$z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) \tag{4}$$

им будут соответствовать значения

$$\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

где через λ обозначен модуль эллиптического интеграла (1) после преобразования Ландена, т. е. величина

$$\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \tag{5}$$

где k' есть дополнительный модуль.

Подстановка (4) приводит $f(z)$ к виду

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right) = \frac{1}{k\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - \zeta^2\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\zeta^2}\right)}}. \tag{6}$$

По формулам (16, § 3) и (19, § 3) имеем

$$B_n \cong \pi a_{2n}, \tag{7}$$

где

$$\pi a_{2n} = -\frac{i}{k}\int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta^{2n+1}\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - \zeta^2\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\zeta^2}\right)}} \tag{8}$$

есть умноженный на π коэффициент Фурье функции $f(\cos\varphi)$. Полагая

$$\zeta^2 = \xi, \tag{9}$$

получим далее

$$\pi a_{2n} = -\frac{i}{k}\int\limits_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi^{n+1}\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - \xi\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\xi}\right)}}, \tag{10}$$

причем круг Γ в плоскости ξ обходится в положительном направлении один, а не два раза. Чтобы умножить алгебраическую особенность в точке $\xi = \frac{1}{\lambda}$, произведем здесь подстановку

$$\frac{1}{\xi} = \lambda(1 - u^2). \tag{11}$$

Мы будем иметь

$$\pi a_{2n} = \frac{\lambda^n}{\sqrt{k'}} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\, du}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}u^2}}. \tag{12}$$

Пределы -1 и $+1$ получатся здесь, если в интеграле (10) деформировать путь интеграции так, чтобы он образовал петлю вокруг участка вещественной оси от $\xi = \frac{1}{\lambda}$ до $\xi = +\infty$. Так как в интеграле (12), при больших n, играет роль только малый участок вблизи $u = 0$, то мы получим приближенное выражение для πa_{2n}, а значит и для B_n, если заменим в (12) корень квадратный на единицу. Подставляя вместо λ его значение (5), мы получим тогда

$$B_n \simeq B_n^0 = \frac{1}{\sqrt{k'}} \left(\frac{1-k'}{1-k'}\right)^n \cdot \beta_n, \tag{13}$$

где

$$\beta_n = \int\limits_{-1}^{+1} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\, du = \pi \cdot \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots 2n}. \tag{14}$$

Величина β_n приближенно равна

$$\beta_n \simeq \sqrt{\frac{\pi}{n}}. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь полный эллиптический интеграл второго рода

$$E = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1-k^2x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{16}$$

Функция

$$f^*(z) = \frac{1}{2}\sqrt{1-k^2z^2} \tag{17}$$

имеет те же особые точки, что и функция (2), и теми же подстановками (4), (9) и (11) коэффициент разложения $f^*(\cos\varphi)$ в ряд Фурье может быть приведен к виду

$$\pi a_{2n}^* = -\sqrt{k'}\,\lambda^n \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}u^2}\,(1-u^2)^{n-\frac{3}{2}}\, u^2\, du. \tag{18}$$

Отсюда получаем следующее приближенное выражение для остаточного члена формулы квадратур

$$B_n^* \cong B_n^{*0} = -\sqrt{k'}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^n \cdot \frac{\beta_n}{2n-1}, \tag{19}$$

где β_n имеет прежнее значение (14).

Перейдем теперь к численным вычислениям. Предложим себе найти по формуле (3, § 3) с 3, 4 и 5 ординатами значения полных эллиптических интегралов F и E для случая

$$k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{20}$$

Производя вычисления, получаем

F		E	
$\frac{\pi}{3} f(0)$	$= 0.5235988$	$\frac{\pi}{3} f^*(0)$	$= 0.5235988$
$\frac{2\pi}{3} f\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$	$= 1.3246116$	$\frac{2\pi}{3} f^*\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$	$= 0.8278824$
F_3	$= 1.8482104$	E_3	$= 1.3514812$
$\frac{\pi}{2} f\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$	$= 1.0373565$	$\frac{\pi}{2} f^*\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$	$= 0.5946369$
$\frac{\pi}{2} f\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)$	$= 0.8158350$	$\frac{\pi}{2} f^*\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)$	$= 0.7560968$
F_4	$= 1.8531915$	E_4	$= 1.3507337$
$\frac{\pi}{5} f(0)$	$= 0.3141593$	$\frac{\pi}{5} f^*(0)$	$= 0.3141593$
$\frac{2\pi}{5} f\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$	$= 0.8489663$	$\frac{2\pi}{5} f^*\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$	$= 0.4650176$
$\frac{2\pi}{5} f\left(\cos\frac{3\pi}{10}\right)$	$= 0.6908129$	$\frac{2\pi}{5} f^*\left(\cos\frac{3\pi}{10}\right)$	$= 0.5714779$
F_5	$= 1.8539385$	E_5	$= 1.3506548$

Сравнивая эти результаты с точными значениями интегралов из таблиц Лежандра

$$F = 1.854074677301; \quad E = 1.350643881048 \tag{21}$$

и вычисляя, с другой стороны, выражения B_n^0 и B_n^{*0} по формулам (13) и (19), получаем нижеследующие таблицы:

Интеграл первого рода

n	F_n	B_n	B_n^0
3	1.8482104	0.0058643	0.005897
4	1.8531915	0.0008832	0.0008853
5	1.8539385	0.0001362	0.0001367

Интеграл второго рода

n	E_n	B_n^*	B_n^{*0}
3	1.3514812	—0.0008373	—0.0008339
4	1.3507337	—0.0000898	—0.00008942
5	1.3506548	—0.0000109	—0.00001074

Таким образом, приближенное выражение остаточного члена дает верно первые два знака уже начиная с $n = 3$.

Если бы мы вместо того, чтобы выводить приближенное выражение B_n^0, оценили верхний предел остаточного члена по способу, изложенному в конце § 3, мы получили бы для него выражение, превышающее B_n^0 приблизительно в n раз (для интеграла первого рода). В других случаях оценка остаточного члена по формуле (21, § 3) дает более грубый результат. Так например, для интеграла, рассмотренного Гауссом

$$\int_{100000}^{200000} \frac{dx}{\lg x} = 8406.243121 \ldots \tag{22}$$

оценка по формуле (21, § 3) превышает истинное значение B_3 и B_4 приблизительно в 200 раз. В виду сложного характера особенности подъинтегральной функции в интеграле (22), более точная оценка остаточного члена, подобная формулам (13) и (19), представляет большие трудности; впрочем и из грубой оценки следует, что при увеличении n на единицу остаточный член уменьшается приблизительно в $(3 + \sqrt{8})^2$ раз, что согласуется с числами, найденными Гауссом. Заметим, что если бы в интеграле (22) пределы были не такие большие числа, как 100 000 и 200 000, а например 2 и 3, то наиболее важной особенной точкой был бы полюс $x = 1$ и точная оценка остаточного члена не представляла бы никаких трудностей.

§ **8. Заключение.** Основной результат нашего исследования можно резюмировать следующим образом. Для остаточного члена формул квадратур типа Гаусса, применяемых к аналитической функции, можно получить приближенное выражение, справедливое при больших значениях n (число

взятых ординат). Порядок малости остаточного члена относительно n связан с величиной области, в которой интегрируемая функция $f(z)$ голоморфна, причем этот порядок тем выше, чем больше эта область. Для случаев

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad p(x) = 1$$

остаточный член приближенно выражается через коэффициенты разложения $f(\cos\varphi)$ в ряд Фурье, причем в первом случае можно получить для него точное выражение, справедливое для всякой функции, допускающей разложение в ряд Фурье, а не только для аналититической функции.

Практическая применимость выведенных формул показана на ряде численных примеров, причем оказалось, что уже для $n = 3$, 4 и 5 приближенное выражение остаточного члена может давать два верных знака.

V. FOCK. SUR LE TERME COMPLÉMENTAIRE DE CERTAINES FORMULES DES QUADRATURES

RÉSUMÉ

L'auteur expose une méthode générale qui permet de trouver, en supposant analytique la fonction à intégrer, une expression approchée pour le terme complémentaire des formules des quadratures du type de Gauss. La méthode est appliquée ensuite aux cas où l'intégrale à calculer est de la forme

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad I_2 = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx; \quad I_3 = \int_{0}^{\infty} x^s e^{-x} f(x)\,dx.$$

Dans les deux premiers cas, le terme complémentaire s'exprime, d'une manière approchée, au moyen des coefficients de Fourier pour la fonction $f(\cos\varphi)$.

La valeur pratique des formules générales est illustrée par plusieurs exemples numériques; l'expression approchée du terme complémentaire peut donner, même pour $n = 3$, 4 ou 5, deux décimales exactes.

Ленинград, Физ.-мат. институт им. В. А. Стеклова. Январь 1932.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ВЕКТОРИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Ю. В. ИКОРНИКОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

1. Пусть x, y, z обозначают прямолинейные прямоугольные координаты точки M пространства, a, q_1, q_2, q_3 какие-нибудь криволинейные координаты той же точки.

Пусть будут

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = f_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = f_3(q_1, q_2, q_3)$$

(1) и

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z)$$

взаимно однозначные, непрерывные и дифференцируемые зависимости между теми и другими координатами всякой точки пространства.

Уравнения

(2) $$q_1(x, y, z) = C_1, \quad q_2(x, y, z) = C_2, \quad q_3(x, y, z) = C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 постоянные будут уравнениями координатных поверхностей, проходящих через данную точку пространства.

Как известно, градиентами координатных поверхностей, в данной точке будут векторы

(3) $$\bar{h}_1 = \frac{\partial q_1}{\partial x} i + \frac{\partial q_1}{\partial y} j + \frac{\partial q_1}{\partial z} q, \quad \bar{h}_2 = \frac{\partial q_2}{\partial x} i + \frac{\partial q_2}{\partial y} j + \frac{\partial q_3}{\partial z} q,$$
$$\bar{h}_3 = \frac{\partial q_3}{\partial x} i + \frac{\partial q_3}{\partial y} j + \frac{\partial q_3}{\partial z} q,$$

где i, j, q обозначают орты направленные по прямолинейным, прямоугольным координатоым осям, имеющим левое расположение.

Построим векторы

$$\overline{a} = \frac{\partial x}{\partial q_1} i + \frac{\partial y}{\partial q_1} j + \frac{\partial z}{\partial q_1} q, \quad \overline{b} = \frac{\partial x}{\partial q_2} i + \frac{\partial x}{\partial q_2} j + \frac{\partial z}{\partial q_2} q, \tag{4}$$
$$\overline{e} = \frac{\partial x}{\partial q_3} i + \frac{\partial y}{\partial q_3} j + \frac{\partial z}{\partial q_3} q,$$

касательные к линиям пересечения координатных поверхностей и предположим, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{e}$ не компланарны.

2. Легко видеть, что векторы $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$, $\overline{h}_3$ будут взаимны векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{e}$.

Действительно, дифференцируя равенство $q_1 = C_1$ по q_2 и по q_3 имеем, что

$$\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_3} = 0$$

и, следовательно,

$$(\overline{h}_1 \cdot \overline{b}) = 0, \quad (\overline{h}_1 \cdot \overline{e}) = 0$$

и вектор $\overline{h}_1$ перпендикулярен к векторам $\overline{b}$ и $\overline{e}$.

Дифференцируя равенство $q_1 = q_1(x, y, z)$ по q_1, имеем, что

$$\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1} = 1,$$

т. е.

$$(\overline{h}_1 \cdot \overline{a}) = 1.$$

Вектор $\overline{h}_1$, перпендикулярный к векторам $\overline{b}$ и $\overline{e}$, параллелен вектору

$$\frac{\{\overline{b} \cdot \overline{e}\}}{\omega},$$

где

$$\omega = (\overline{a} \cdot \{\overline{b} \cdot \overline{e}\}).$$

Таким образом, имеем, что

$$\overline{h}_1 = m \frac{\{\overline{b} \cdot \overline{e}\}}{\omega}, \quad \text{и}$$

для определения m умножим равенство геометрически на $\overline{a}$.

Имеем, что

$$m = (\overline{h}_1 \cdot \overline{a})$$

или

$$m = 1 \quad \text{и} \quad \overline{h}_1 = \frac{\{\overline{b} \cdot \overline{e}\}}{\omega}.$$

Таким образом, имеем формулы

$$(5) \qquad \overline{h}_1 = \frac{\{\overline{b} \cdot \overline{e}\}}{\omega}, \quad \overline{h}_2 = \frac{\{\overline{e} \cdot \overline{a}\}}{\omega}, \quad \overline{h}_3 = \frac{\{\overline{a} \cdot \overline{b}\}}{\omega},$$

которые и доказывают взаимность векторов $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$, $\overline{h}_3$ векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{e}$.

Как известно, если векторы $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$, $\overline{h}_3$ взаимны векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{e}$, то и обратно векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{e}$ взаимны векторам $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$, $\overline{h}_3$.

По свойству взаимности имеем, что

$$(6) \qquad \begin{aligned} &(\overline{h}_1 \cdot \overline{a}) = 1, \quad (\overline{h}_1 \cdot \overline{b}) = 0, \quad (\overline{h}_1 \cdot \overline{e}) = 0 \\ &(\overline{h}_2 \cdot \overline{a}) = 0, \quad (\overline{h}_2 \cdot \overline{b}) = 1, \quad (\overline{h}_2 \cdot \overline{e}) = 0 \\ &(\overline{h}_3 \cdot \overline{a}) = 0, \quad (\overline{h}_3 \cdot \overline{b}) = 0, \quad (\overline{h}_3 \cdot \overline{e}) = 1. \end{aligned}$$

Как известно, всякий вектор $\overline{u}$ может быть разложен при помощи взаимных векторов, следующим образом

$$(7) \quad \overline{u} = (\overline{u} \cdot \overline{a})\overline{h}_1 + (\overline{u} \cdot \overline{b})\overline{h}_2 + (\overline{u} \cdot \overline{e})\overline{h}_3 = (\overline{u} \cdot \overline{h}_1)\overline{a} + (\overline{u} \cdot \overline{h}_2)\overline{b} + (\overline{u} \cdot \overline{h}_3)\overline{e}.$$

3. Пусть вектор $\overline{v}$ изображает скорость точки M, расположенной на пересечении координатных поверхностей

$$q_1 = C_1, \quad q_2 = C_2, \quad q_3 = C_3.$$

Легко видеть, что составляющие вектора $\overline{v}$ по направлениям векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{e}$ будут равны $\overline{a}\dot{q}_1$, $\overline{b}\dot{q}_2$, $\overline{e}\dot{q}_3$, где $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ обозначают производные по времени t от q_1, q_2, q_3.

Действительно, имеем, что

$$\bar{v} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} q$$

и

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\dot{q}_3, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\dot{q}_3$$

и следовательно

(8) $$\bar{v} = \bar{a}\dot{q}_1 + \bar{b}\dot{q}_2 + \bar{e}\dot{q}_3.$$

4. Пусть уравнение

$$\varphi(q_1, q_2, q_3) = 0$$

изображает какую-нибудь поверхность. Градиент такой поверхности, как легко видеть, будет

(9) $$\bar{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} i + \frac{\partial\varphi}{\partial y} j + \frac{\partial\varphi}{\partial z} q = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\bar{h}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\bar{h}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\bar{h}_3.$$

Обозначим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} = \varphi_2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} = \varphi_3.$$

По свойству взаимности (6) имеем, что

$$(\bar{p}\cdot\bar{a}) = \varphi_1, \quad (\bar{p}\cdot\bar{b}) = \varphi_2, \quad (\bar{p}\cdot\bar{e}) = \varphi_3$$

и следовательно

$$\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}\cdot\bar{a}\right) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} - \left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{a}}{\partial q_1}\right), \quad \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}\cdot\bar{b}\right) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} - \left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{b}}{\partial q_2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}\cdot\bar{e}\right) = \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3} - \left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{e}}{\partial q_3}\right), \quad \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}\cdot\bar{a}\right) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} - \left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{a}}{\partial q_2}\right),$$

(10) $$\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}\cdot\bar{b}\right) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1} - \left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{b}}{\partial q_1}\right), \quad \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}\cdot\bar{e}\right) = \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2} - \left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{e}}{\partial q_2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}\cdot\bar{a}\right) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3} - \left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{a}}{\partial q_3}\right), \quad \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}\cdot\bar{b}\right) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3} - \left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{b}}{\partial q_3}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}\cdot\bar{e}\right) = \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1} - \left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{e}}{\partial q_1}\right).$$

Так как

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial q_2}=\frac{\partial \bar{b}}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial q_3}=\frac{\partial \bar{e}}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \bar{b}}{\partial q_3}=\frac{\partial \bar{e}}{\partial q_2},$$

то, как видно из формул 10 имеем, что

$$(11)\quad \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2}\cdot\bar{a}\right)=\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1}\cdot\bar{b}\right), \quad \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_3}\cdot\bar{a}\right)=\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1}\cdot\bar{e}\right), \quad \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_3}\cdot\bar{b}\right)=\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2}\cdot\bar{e}\right).$$

5. Если точка движется по данной поверхности, то очевидно, что

$$(\bar{p}\cdot\bar{v})=0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d\bar{p}}{dt}\cdot\bar{v}\right)+(\bar{p}\cdot\bar{w})=0,$$

где $\bar{w}$ вектор ускорения.

Так как

$$\bar{w}=\frac{dv}{dt}\bar{\sigma}+\frac{v^2}{R}\bar{\varepsilon},$$

где $\bar{\sigma}$ и $\bar{\varepsilon}$ — орты, направленные по касательной и по главной нормали к траэктории, $\frac{1}{R}$ кривизна траэктории в данной точке, то

$$(\bar{p}\cdot\bar{w})=\frac{v^2}{R}(\bar{\varepsilon}\cdot\bar{p}).$$

Если точка движется по нормальному сечению поверхности, то $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{p}$ расположены на одной прямой и $(\bar{\varepsilon}\cdot\bar{p})=\pm p$; следовательно

$$\pm\frac{v^2 p}{R}=-\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\cdot\bar{v}\right).$$

Считая кривизну $\frac{1}{R}$ нормального сечения положительной, если векторы $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{p}$ направлены одинаково и отрицательной, если векторы $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{p}$ направлены противоположно, имеем формулу для кривизны нормального сечения

$$(12)\quad \frac{v^2 p}{R}=-\left(\frac{d\bar{p}}{dt}\cdot\bar{v}\right).$$

6. Дифференцируя вектор $\bar{p}$ по t имеем, что

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \dot{\varphi}_1 \bar{h}_1 + \dot{\varphi}_2 \bar{h}_2 + \dot{\varphi}_3 \bar{h}_3 + \varphi_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} + \varphi_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} + \varphi_3 \frac{d\bar{h}_3}{dt}.$$

Векторы

$$\frac{d\bar{h}_1}{dt}, \quad \frac{d\bar{h}_2}{dt}, \quad \frac{d\bar{h}_3}{dt}$$

разложим по формуле (7), по вектором $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$.

Так как из формул (6) имеем, что

$$\left(\frac{d\bar{h}_1}{dt} \cdot \bar{a}\right) = -\left(\bar{h}_1 \cdot \frac{d\bar{a}}{dt}\right), \quad \left(\frac{d\bar{h}_1}{dt} \cdot \bar{b}\right) = -\left(\bar{h}_1 \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}\right),$$

$$\left(\frac{d\bar{h}_1}{dt} \cdot \bar{e}\right) = -\left(\bar{h}_1 \cdot \frac{d\bar{e}}{dt}\right),$$

то следовательно,

$$\frac{d\bar{h}_1}{dt} = -\left(\bar{h}_1 \cdot \frac{d\bar{a}}{dt}\right)\bar{h}_1 - \left(\bar{h}_1 \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}\right)\bar{h}_2 - \left(\bar{h}_1 \cdot \frac{d\bar{e}}{dt}\right)\bar{h}_3$$

и такие же равенства для

$$\frac{d\bar{h}_2}{dt}, \quad \frac{d\bar{h}_3}{dt}.$$

Умножая такие равенства на $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ соответственно и складывая их имеем, что

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \left[\dot{\varphi}_1 - \left(\bar{p} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt}\right)\right]\bar{h}_1 + \left[\dot{\varphi}_2 - \left(\bar{p} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}\right)\right]\bar{h}_2 + \left[\dot{\varphi}_3 - \left(\bar{p} \cdot \frac{d\bar{e}}{dt}\right)\right]\bar{h}_3$$

и следовательно, по формулам (12) и (8).

$$\frac{v^2 p}{R} = -\left(\frac{d\bar{p}}{dt} \cdot \bar{v}\right) = \left[\left(\bar{p} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt}\right) - \dot{\varphi}_1\right]\dot{q}_1 + \left[\left(\bar{p} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}\right) - \dot{\varphi}_2\right]\dot{q}_2 +$$
$$\left[\left(\bar{p} \cdot \frac{d\bar{e}}{dt}\right) - \dot{\varphi}_3\right]\dot{q}_3.$$

Так как

$$\left(\bar{p}\cdot\frac{d\bar{a}}{dt}\right)=\left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{a}}{\partial q_1}\right)\dot{q}_1+\left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{a}}{\partial q_2}\right)\dot{q}_2+\left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{a}}{\partial q_3}\right)\dot{q}_3$$

$$\dot{\varphi}_1=\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\dot{q}_3$$

$$\left(\bar{p}\cdot\frac{d\bar{b}}{dt}\right)=\left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{b}}{\partial q_1}\right)\dot{q}_1+\left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{b}}{\partial q_2}\right)\dot{q}_2+\left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{b}}{\partial q_3}\right)\dot{q}_3$$

$$\dot{\varphi}_2=\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\cdot\dot{q}_3$$

$$\left(\bar{p}\cdot\frac{d\bar{e}}{dt}\right)=\left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{e}}{\partial q_1}\right)\dot{q}_1+\left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{e}}{\partial q_2}\right)\dot{q}_2+\left(\bar{p}\cdot\frac{\partial\bar{e}}{\partial q_3}\right)\dot{q}_3$$

$$\dot{\varphi}_3=\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\dot{q}_3,$$

то подставляя такие величины в предыдущую формулу и пользуясь формулами (10) и (11) имеем, что

$$\frac{v^2p}{R}=b_{1,1}\dot{q}_1^2+b_{2,2}\dot{q}_2^2+b_{3,3}\dot{q}_3^2+2b_{1,2}\dot{q}_1\dot{q}_2+2b_{1,3}\dot{q}_1\dot{q}_3+2b_{2,3}\dot{q}_2\dot{q}_3,$$

где коэффициенты при

$$\dot{q}_1^2,\ \dot{q}_2^2,\ \dot{q}_3^2,\ \dot{q}_1\dot{q}_2,\ \dot{q}_1\dot{q}_3,\ \dot{q}_2\dot{q}_3$$

будут

$$b_{1,1}=-\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}\cdot\bar{a}\right),\quad b_{2,2}=-\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}\cdot\bar{b}\right),\quad b_{3,3}=-\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}\cdot\bar{e}\right)$$

$$(13)\quad b_{1,2}=-\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}\cdot\bar{a}\right)=-\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}\cdot\bar{b}\right).\quad b_{1,3}=-\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}\cdot\bar{e}\right)=$$

$$=-\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}\cdot\bar{a}\right),\quad b_{2,3}=-\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}\cdot\bar{b}\right)=-\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}\cdot\bar{e}\right).$$

Обозначив

$$\frac{\dot{q}_1}{v}=u_1,\quad \frac{\dot{q}_2}{v}=u_2,\quad \frac{\dot{q}_3}{v}=u_3,$$

имеем формулу для кривизны нормального сечения поверхности

$$(14)\quad \frac{p}{R}=b_{1,1}u_1^2+b_{2,2}u_2^2+b_{3,3}u_3^2+2b_{1,2}u_1u_2+2b_{1,3}u_1u_3+2b_{2,3}u_2u_3,$$

Коэффициенты формулы (14) представляют векториальную интерпретацию коэффициентов формулы данной акад. И. Сомовым в мемуаре «Moyen d'exprimer directement en coordonées curvilignes quelconques orthoganales ou obliques les paramétres diffirentielles du premier et du second ordres et la courbure d'une surface» (Изв. Ак. Наук, 1865, стр. 27).

Так как

$$(\bar{p}\cdot\bar{v})=0,\quad v^2=(\bar{v}\cdot\bar{v})\quad \text{и}\quad \bar{v}=\bar{a}\dot{q}_1+\bar{b}\dot{q}_2+\bar{e}\dot{q}_3,$$

то переменные u_1, u_2, u_3 в формуле (14) должны удовлетворять еще уравнениям

$$2\varphi_1 u_1+2\varphi_2 u_2+2\varphi_3 u_3=0 \tag{15}$$

$$a^2u_1^2+\bar{b}^2u_2^2+e^2u_3^2+2(\bar{a}\cdot\bar{b})u_1u_2+ \\ +2(\bar{b}\cdot e)u_2u_3+2(\bar{a}\cdot\bar{e})u_1u_3=1. \tag{16}$$

7. Для определения кривизны главных нормальных сечений помножим уравнение (15) на μ, уравнение (16) на λ, сложим уравнения (14), (15), (16) и приравняем нулю частные производные такой суммы по u_1, по u_2 и по u_3.

Таким образом, имеем систему

$$(b_{1,1}+a^2\lambda)u_1+(b_{1,2}+(\bar{a}\cdot\bar{b})\lambda)u_2+(b_{1,3}+(\bar{a}\cdot\bar{e})\lambda)u_3+\varphi_1\mu=0$$
$$(b_{1,2}+(\bar{a}\cdot\bar{b})\lambda)u_1+(b_{2,2}+b^2\lambda)u_2+(b_{2,3}+(\bar{b}\cdot\bar{e})\lambda)u_3+\varphi_1\mu=0$$
$$(b_{1,3}+(\bar{a}\cdot\bar{e})\lambda)u_1+(b_{2,3}+(\bar{b}\cdot\bar{e})\lambda)u_2+(b_{3,3}+e^2\lambda)u_3+\varphi_3\mu=0.$$

Пользуясь формулами (13) и обозначив

$$\bar{a}\lambda-\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}=x_1,\quad \bar{b}\lambda-\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}=x_2,\quad \bar{e}\lambda-\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}=x_3$$

можем переписать предыдущую систему так

$$\begin{aligned}&(\bar{x}_1\cdot\bar{a})u_1+(\bar{x}_2\cdot\bar{a})u_2+(\bar{x}_3\cdot\bar{a})u_3+\varphi_1\mu=0\\ &(\bar{x}_1\cdot\bar{b})u_1+(\bar{x}_2\cdot\bar{b})u_2+(\bar{x}_3\cdot\bar{b})u_3+\varphi_2\mu=0\\ &(\bar{x}_1\cdot\bar{e})u_1+(\bar{x}_2\cdot\bar{e})u_2+(\bar{x}_3\cdot\bar{e})u_3+\varphi_3\mu=0.\end{aligned} \tag{17}$$

Пусть Δ будет определитель системы (17). Системе (17) удовлетворяют значения

$$u_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad u_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad u_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1=-\mu\begin{vmatrix}\varphi_1, & (\bar{x}_2\cdot\bar{a}), & (\bar{x}_3\cdot\bar{a})\\ \varphi_2, & (\bar{x}_2\cdot\bar{b}), & (\bar{x}_3\cdot\bar{b})\\ \varphi_3, & (\bar{x}_2\cdot\bar{e}), & (\bar{x}_3\cdot\bar{e})\end{vmatrix}=$$

$$=-\mu\left[(\{\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\}\{\bar{b}\cdot\bar{e}\})\varphi_1+(\{\bar{x}_3\cdot\bar{x}_2\}\{\bar{a}\cdot\bar{e}\})\varphi_2+(\{\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\}\cdot\{\bar{a}\cdot\bar{b}\})\varphi_3\right]=$$

$$=-\mu\left[(\{\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\}\cdot\bar{h}_1)\varphi_1+(\{\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\}\cdot\bar{h}_2)\varphi_2+(\{\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\}\bar{h}_3)\varphi_3\right]\omega=$$

$$=-\mu\omega(\{\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\}\cdot\bar{p})$$

так как по формулам (5)

$$\{\bar{b}\cdot\bar{e}\}=\bar{h}_1\omega,\quad \bar{e}\cdot\bar{a}\}=\bar{h}_2\omega,\quad \{\bar{a}\cdot\bar{b}\}=\bar{h}_3\omega.$$

Также

$$\Delta_2=-\mu\begin{vmatrix}(\bar{x}_1\cdot\bar{a}), & \varphi_1, & (\bar{x}_3\cdot\bar{a})\\ (\bar{x}_1\cdot\bar{b}), & \varphi_2, & (\bar{x}_3\cdot\bar{b})\\ (\bar{x}_1\cdot\bar{e}), & \varphi_3, & (\bar{x}_3\cdot\bar{e})\end{vmatrix}=-\mu\omega(\{\bar{x}_3\cdot\bar{x}_1\}\cdot\bar{p})$$

$$\Delta_3=-\mu\begin{vmatrix}(\bar{x}_1\cdot\bar{a}), & (\bar{x}_2\cdot\bar{a}), & \varphi_1\\ (\bar{x}_1\cdot\bar{b}), & (\bar{x}_2\cdot\bar{b}), & \varphi_2\\ (\bar{x}_1\cdot\bar{e}), & (\bar{x}_2\cdot\bar{e}), & \varphi_3\end{vmatrix}=-\mu\omega(\{\bar{x}_1,\bar{x}_2\}\cdot\bar{p}).$$

Подставляя значения u_1, u_2, u_3 в уравнение (15) имеем уравнение для определения λ.

$$(18)\qquad (\{\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\}\cdot\bar{p})\varphi_1+(\{\bar{x}_3\cdot\bar{x}_1\}\cdot\bar{p})\varphi_2+(\{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\}\cdot\bar{p})\varphi_3=0.$$

Перемножая векториально $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$; $\bar{x}_3$, $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$ имеем, что

$$\{\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3\} = \{\bar{b} \cdot \bar{e}\} \lambda^2 - \left[\left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2} \cdot \bar{e}\right\} + \left\{\bar{b} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_3}\right\}\right] \lambda + \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_3}\right\}$$

$$\{\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_1\} = \{\bar{e} \cdot \bar{a}\} \lambda^2 - \left[\left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_3} \cdot \bar{a}\right\} + \left\{\bar{e} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1}\right\}\right] \lambda + \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1}\right\}$$

$$\{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2\} = \{\bar{a} \cdot \bar{b}\} \lambda^2 - \left[\left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1} \cdot \bar{b}\right\} + \left\{\bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2}\right\}\right] \lambda + \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2}\right\}$$

и следовательно, уравнение для определения λ будет

$$A\lambda^2 + B\lambda + \mathrm{E} = 0, \tag{19}$$

где

$$A = (\bar{p} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{e}\}) \varphi_1 + (\bar{p} \cdot \{\bar{e} \cdot \bar{a}\}) \varphi_2 + (\bar{p} \cdot \{\bar{a} \cdot \bar{b}\}) \varphi_3 =$$

$$= \omega [(\bar{p} \cdot \bar{h}_1) \varphi_1 + (\bar{p} \cdot \bar{h}_2) \varphi_2 + (\bar{p} \cdot \bar{h}_3) \varphi_3] = (\omega \bar{p} \cdot \bar{p}) = \omega p^2.$$

$$B = \left[\left(\bar{p} \cdot \left\{\bar{e} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2}\right\}\right) + \left(\bar{p} \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_3} \cdot \bar{b}\right\}\right)\right] \varphi_1 + \left[\left(\bar{p} \cdot \left\{\bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_3}\right\}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\bar{p} \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1} \cdot \bar{e}\right\}\right)\right] \varphi_2 + \left[\left(\bar{p} \cdot \left\{\bar{b} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1}\right\}\right) + \left(\bar{p} \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2} \cdot \bar{a}\right\}\right)\right] \varphi_3.$$

$$\mathrm{E} = \left(\bar{p} \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_3}\right\}\right) \varphi_1 + \left(\bar{p} \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1}\right\}\right) \varphi_2 + \left(\bar{p} \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2}\right\}\right) \varphi_3.$$

Если уравнения системы (17) помножить соответственно на u_1, u_2, u_3 и сложить, то на основании равенств (14), (15), (16), как легко видеть будем иметь, что

$$\frac{p}{R} + \lambda = 0.$$

Если λ_1 и λ_2 корни уравнения (19), то

$$\lambda_1 = -\frac{p}{R_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{R_2},$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны.

8. Таким образом, имеем векториальную формулу для Гауссовой кривизны поверхности в данной точке

$$(20)\quad \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{1}{p^2}\frac{E}{A}=\frac{\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}\right\}\right)\varphi_1+\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}\right\}\right)\varphi_2+\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}\right\}\right)\varphi_3}{\omega p^4}$$

и другую векториальную формулу для средней кривизны поверхности в данной точке

$$(21)\quad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{p}\frac{B}{A}=$$

$$\frac{\left[\left(\bar{p}\cdot\left\{\bar{e}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}\right\}\right)-\left(\bar{p}\cdot\left\{\bar{b}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}\right\}\right)\right]\varphi_1+}{\omega p^3}$$

$$\frac{+\left[\left(\bar{p}\cdot\left\{\bar{a}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_3}\right\}-\left(\bar{p}\cdot\left\{\bar{e}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}\right\}\right)\right]\varphi_2+\left[\left(\bar{p}\cdot\left\{\bar{b}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_1}\right\}\right)-\left(\bar{p}\cdot\left\{\bar{a}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_2}\right\}\right)\right]\varphi_3}{\omega p^3}.$$

9. Если координаты q_1, q_2, q_3 будут прямолинейными, то обозначим

$$q_1=x_1,\ q_2=y_1,\ q_3=z_1.$$

Если i_1, i_2, i_3 будут орты координатных осей x_1, y_1, z_1, то между координатами прямоугольными x, y, z и координатами x_1, y_1, z_1 точки пространства имеет место такое равенство

$$xi+yj+zq=x_1 i_1+y_1 i_2+z_1 i_3,$$

откуда

$$x=x_1(i_1\cdot i)+y_1(i_2\cdot i)+z_1(i_3\cdot i),\ y=x_1(i_1\cdot j)+y_1(i_2\cdot j)+z_1(i_3\cdot j),$$
$$z=x_1(i_1\cdot q)+y_1(i_2\cdot q)+z_1(i_3\cdot q).$$

По формулам (4) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{e}$ будут

$$\bar{a}=(i_1\cdot i)i+(i_1\cdot j)j+(i_1\cdot q)q,\ \bar{b}=(i_2\cdot i)i+(i_2\cdot j)j+(i_2\cdot q)q,$$
$$\bar{e}=(i_3\cdot i)i+(i_3\cdot j)j+(i_3\cdot q).$$

Легко видеть, что такие формулы дают

$$(22)\quad \bar{a}=i_1,\ \bar{b}=i_2,\ \bar{e}=i_3,$$

так как

$$i_1=(i_1\cdot i)i+(i_1\cdot j)j+(i_1\cdot q)q.$$

Векторы $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$, по свойству взаимности, будут равны

$$(23)\qquad \bar{h}_1 = \frac{\{i_2 \cdot i_3\}}{\omega_1}, \quad \bar{h}_2 = \frac{\{i_3 \cdot i_1\}}{\omega_1}, \quad \bar{h}_3 = \frac{\{i_1 \cdot i_2\}}{\omega_1},$$

где

$$\omega_1 = (i_1 \cdot \{i_2 \cdot i_3\})$$

и следовательно будут постоянными.

Градиент поверхности

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = C_1$$

будет

$$\bar{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\bar{h}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\bar{h}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\bar{h}_3 = \varphi_1\bar{h}_1 + \varphi_2\bar{h}_2 + \varphi_3 h_3$$

и

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1} = \varphi_{x_1 x_1}\bar{h}_1 + \varphi_{y_1 x_1}\bar{h}_2 + \varphi_{z_1 x_1}\bar{h}_3, \quad \frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1} = \varphi_{x_1 y_1}\bar{h}_1 + \varphi_{y_1 y_1}\bar{h}_2 + \varphi_{z_1 y_1}\bar{h}_3,$$

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1} = \varphi_{x_1 z_1}\bar{h}_1 + \varphi_{y_1 z_1}\bar{h}_2 + \varphi_{z_1 z_1}\bar{h}_3,$$

где

$$\varphi_{x_1 x_1} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \quad \varphi_{y_1 x_1} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1 \partial x_1}, \quad \varphi_{z_1 x_1} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1 \partial x_1}, \quad \varphi_{y_1 z_1} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1 \partial z_1},$$

$$\varphi_{y_1 y_1} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}, \quad \varphi_{z_1 z_1} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1^2}.$$

Перемножая векториально такие векторы имеем, что

$$\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\right\} = [\varphi_{x_1 y_1}\varphi_{y_1 z_1} - \varphi_{y_1 y_1}\varphi_{x_1 z_1}]\{\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2\} +$$

$$+ [\varphi_{y_1 y_1}\varphi_{z_1 z_1} - (\varphi_{y_1 z_1})^2]\{\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3\} + [\varphi_{z_1 y_1}\varphi_{x_1 z_1} - \varphi_{x_1 y_1}\varphi_{z_1 z_1}]\{\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1\}.$$

$$\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\right\} = [\varphi_{x_1 z_1}\varphi_{y_1 x_1} - \varphi_{y_1 z_1}\varphi_{x_1 x_1}]\{\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2\} +$$

$$+ [\varphi_{y_1 z_1}\varphi_{z_1 x_1} - \varphi_{z_1 z_1}\varphi_{y_1 x_1}]\{\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3\} + [\varphi_{z_1 z_1}\varphi_{x_1 x_1} - (\varphi_{x_1 z_1})^2]\{\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1\},$$

$$\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\right\} = [\varphi_{x_1 x_1}\varphi_{y_1 y_1} - (\varphi_{y_1 x_1})^2]\{\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2\} + [\varphi_{y_1 x_1}\varphi_{z_1 y_1} - \varphi_{z_1 x_1}\varphi_{y_1 y_1}]\{\bar{h}_2 \cdot \bar{h}_3\} +$$

$$+ [\varphi_{x_1 y_1}\varphi_{z_1 x_1} - \varphi_{x_1 x_1}\varphi_{z_1 y_1}]\{\bar{h}_3 \cdot \bar{h}_1\}.$$

Таким образом векториально геометрические произведения в числителе формулы (20) будут равны

$$\varphi_1\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\right\}\right)=[\varphi_1^2(\varphi_{y_1y_1}\varphi_{z_1z_1}-\varphi_{y_1z_1}^2)+\varphi_1\varphi_2(\varphi_{z_1y_1}\varphi_{x_1z_1}-\varphi_{x_1y_1}\varphi_{z_1z_1})+$$

$$+\varphi_3\varphi_1(\varphi_{x_1y_1}\varphi_{y_1z_1}-\varphi_{y_1y_1}\varphi_{x_1z_1})](\bar{h}_1\cdot\{\bar{h}_2\cdot\bar{h}_3\}),$$

$$\varphi_2\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\right\}\right)=[\varphi_2\varphi_1(\varphi_{y_1z_1}\varphi_{z_1x_1}-\varphi_{z_1z_1}\varphi_{y_1x_1})+\varphi_2^2(\varphi_{z_1z_1}\varphi_{x_1x_1}-\varphi_{x_1z_1}^2)+$$

$$+\varphi_2\varphi_3(\varphi_{x_1z_1}\varphi_{y_1x_1}-\varphi_{y_1z_1}\varphi_{x_1x_1})](\bar{h}_1\cdot\{\bar{h}_2\cdot\bar{h}_3\}),$$

$$\varphi_3\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\right\}\right)=[\varphi_3\varphi_1(\varphi_{y_1x_1}\varphi_{z_1y_1}-\varphi_{z_1x_1}\varphi_{y_1y_1})+$$

$$+\varphi_2\varphi_3(\varphi_{x_1y_1}\varphi_{z_1x_1}-\varphi_{x_1x_1}\varphi_{z_1y_1})+\varphi_3^2(\varphi_{x_1x_1}\varphi_{y_1y_1}-\varphi_{y_1x_1}^2)](\bar{h}_1\cdot\{\bar{h}_2\cdot\bar{h}_3\})$$

и следовательно, формула (20) принимает вид

$$\frac{\omega_1}{R_1}\cdot\frac{p^4}{R_2}=[\varphi_1^2(\varphi_{y_1y_1}\varphi_{z_1z_1}-\varphi_{y_1z_1}^2)+\varphi_2^2(\varphi_{z_1z_1}\varphi_{x_1x_1}-\varphi_{x_1z_1}^2)+$$

$$(24)\qquad +\varphi_3^2(\varphi_{x_1x_1}\varphi_{y_1y_1}-\varphi_{y_1x_1}^2)+2\varphi_1\varphi_2(\varphi_{z_1y_1}\varphi_{x_1z_1}-\varphi_{x_1y_1}\varphi_{z_1z_1})+$$

$$+2\varphi_3\varphi_1(\varphi_{x_1y_1}\varphi_{y_1z_1}-\varphi_{y_1y_1}\varphi_{x_1z_1})+$$

$$+2\varphi_2\varphi_3(\varphi_{x_1z_1}\varphi_{y_1x_1}-\varphi_{y_1z_1}\varphi_{x_1x_1})](\bar{h}_1\cdot\{\bar{h}_2\cdot\bar{h}_3\}).$$

Так как по формулам (23)

$$\{\bar{h}_2\cdot\bar{h}_3\}=\frac{(\{i_3\cdot i_1\}\cdot\{i_1\cdot i_2\})}{\omega_1^2}=\frac{(\{i_3\cdot i_1\}\cdot i_2)}{\omega_1^2}i_1=\frac{1}{\omega_1}i_1,$$

то следовательно,

$$(\bar{h}_1\cdot\{\bar{h}_2\cdot\bar{h}_3\})=\frac{1}{\omega_1}\frac{(i_1\cdot\{i_2\cdot i_3\})}{\omega_1}=\frac{1}{\omega_1}.$$

Таким образом, имеем формулу для кривизны Гаусса в случае косоугольных координатных осей.

11. Пусть будут

$$(i_2\cdot i_3)=\cos\lambda,\quad (i_1\cdot i_3)=\cos\mu,\quad (i_1\cdot i_2)=\cos\nu.$$

Квадрат векториально геометрического произведения

$$\omega_1^2 = (i_1 \cdot \{i_2 \cdot i_3\})^2$$

можно представить в форме определителя. Действительно, пусть $\bar{\xi}_1$ будет орт вектора $\{i_2 \cdot i_3\}$. Разложив орт i_1 по ортам i_2, i_3, $\bar{\xi}_1$ имеем, что

$$i_1 = Xi_2 + Yi_3 + Z\bar{\xi}_1$$

помножая такое равенство последовательно геометрически на i_2, i_3, $\bar{\xi}_1$, i_1 имеем систему уравнений

$$X + Y\cos\lambda = \cos\nu,\ X\cos\lambda + Y = \cos\mu,\ Z = (i_1 \cdot \bar{\xi}_1),$$

$$X\cos\nu + Y\cos\mu + Z(i_1 \cdot \bar{\xi}_1) = 1.$$

Исключая из таких уравнений X, Y, Z видим, что

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\lambda, & 0, & \cos\mu \\ \cos\lambda, & 1, & 0, & \cos\mu \\ \cos\nu, & \cos\mu, & (i_1 \cdot \bar{\xi}_1), & 1 \\ 0, & 0, & 1, & (i_1 \cdot \bar{\xi}_1) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\lambda, & 0 \\ \cos\lambda, & 1, & 0 \\ \cos\nu, & \cos\mu, & (i_1 \cdot \bar{\xi}_1) \end{vmatrix} (i_1 \cdot \bar{\xi}_1) - \begin{vmatrix} 1, & \cos\lambda, & \cos\nu \\ \cos\lambda, & 1, & \cos\mu \\ \cos\nu, & \cos\mu, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно,

$$(i_1 \cdot \bar{\xi}_1)^2 (1 - \cos^2\lambda) - D = 0,$$

где

$$D = \begin{vmatrix} 1, & \cos\lambda, & \cos\nu \\ \cos\lambda, & 1, & \cos\mu \\ \cos\nu, & \cos\mu & 1 \end{vmatrix}.$$

Произведение $(i_1 \cdot \{i_2 \cdot i_3\})$ равно величине вектора $\{i_2 \cdot i_3\}$ умноженной на cos угла между векторами i_1 и $\{i_2 \cdot i_3\}$, т. е. на $(i_1 \cdot \overline{\xi}_1)$. Так как квадрат величины вектора $\{i_2 \cdot i_3\}$ равен

$$\sin^2 \lambda = 1 - \cos^2 \lambda,$$

то

$$D = \omega_1^2 = (i_1 \cdot \{i_2 \cdot i_3\})^2$$

и следовательно

$$(i_1 \cdot \{i_2 \cdot i_3\}) = \sqrt{D}.$$

12. Если координатные орты i_1, i_1, i_3 ортогональны и имеют левое расположение, то

$$\omega_1 = (i_1 \cdot \{i_2 \cdot i_3\}) = 1, \quad \overline{h}_1 = \frac{\{i_2 \cdot i_3\}}{\omega_1} = i_1, \quad \overline{h}_2 = \frac{\{i_3 \cdot i_1\}}{\omega_1} = i_2,$$

$$\overline{h}_3 = \frac{\{i_1 \cdot i_2\}}{\omega_1} = i_3$$

и векторы $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$, $\overline{h}_3$ совпадают соответственно с векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{e}$.

Так как $\omega_1 = 1$, то из формулы (24) имеем знаменитую формулу, данную Гауссом в мемуаре «Disquisitiones generales circa superficies curvas», в главе IX

$$\begin{aligned} \frac{p^4}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = {} & \varphi_1^2 (\varphi_{y_1 y_1} \varphi_{z_1 z_1} - \varphi_{y_1 z_1}^2) + \varphi_2^2 (\varphi_{z_1 z_1} \varphi_{x_1 x_1} - \varphi_{x_1 z_1}^2) + \\ & + \varphi_3^2 (\varphi_{x_1 x_1} \varphi_{y_1 y_1} - \varphi_{x_1 y_1}^2) + 2\varphi_1 \varphi_2 (\varphi_{y_1 z_1} \varphi_{x_1 z_1} - \varphi_{x_1 y_1} \varphi_{z_1 z_1}) + \\ & + 2\varphi_1 \varphi_3 (\varphi_{x_1 y_1} \varphi_{y_1 z_1} - \varphi_{y_1 y_1} \varphi_{x_1 z_1}) + 2\varphi_2 \varphi_3 (\varphi_{x_1 z_1} \varphi_{y_1 x_1} - \varphi_{y_1 z_1} \varphi_{x_1 x_1}), \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$p^4 = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)^2.$$

Формулу (25) легко запомнить при помощи функционального определителя частных производных

$$\varphi_1 = \varphi_{x_1}, \quad \varphi_2 = \varphi_{y_1}, \quad \varphi_3 = \varphi_{z_1},$$

т. е. при помощи определителя Гессе

$$\begin{vmatrix} \varphi_{x_1 x_1}, & \varphi_{x_1 y_1}, & \varphi_{x_1 z_1} \\ \varphi_{y_1 x_1}, & \varphi_{y_1 y_1}, & \varphi_{y_1 z_1} \\ \varphi_{z_1 x_1}, & \varphi_{z_1 y_1}, & \varphi_{z_1 z_1} \end{vmatrix}.$$

Действительно, разности в скобках в правой части формулы (25) представляют собою миноры определителя Гессе. Значки у

$$\varphi_1^2 = \varphi_1\varphi_1, \ \varphi_2^2 = \varphi_2\varphi_2, \ \varphi_3^2 = \varphi_{3,3}, \ \varphi_1\varphi_2, \ \varphi_1\varphi_3, \ \varphi_2\varphi_{3,3}$$

указывают ту строку и тот столбец, на пересечении которых расположен элемент определителя, которому соответствует такой минор.

13. Если координатные оси x_1, y_1, z_1, ортогональны и поверхность задана уравнением

$$z_1 - \varphi(x_1, y_1) = 0,$$

то градиент поверхности будет

$$\bar{p} = -Pi_1 - \theta i_2 + i_3,$$

где

$$P = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \theta = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}$$

и

$$p^2 = 1 + P^2 + \theta^2.$$

Обозначив

$$A = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \quad B = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_1}, \quad E = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2},$$

имеем, что

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1} = -Ai_1 - Bi_2, \ \frac{\partial\bar{p}}{\partial y^1} = -Bi_1 - Ei_2, \quad \frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1} = 0.$$

По формуле (20) имеем, следовательно, что

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} = \frac{\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\right\}\right)}{p^4}.$$

Так как

$$\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\right\} = \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3 \\ -A, & -B, & 0 \\ -B, & -E, & 0 \end{vmatrix} = (AE - B^2)\, i_3$$

и

$$\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\right\}\right) = AE - B^2,$$

то следовательно, имеем формулу данную Гауссом в главе VII того же мемуара

$$(26)\qquad \mu = \frac{AE - B^2}{(1 + P^2 + \theta^2)^2},$$

где μ кривизна Гаусса поверхности в данной точке.

14. Формулу (26) можно геометрически интерпретировать следующим образом.

Пусть L и L_1 будут две какие-нибудь кривые, проходящие по поверхности через данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$, s и s_1 длины дуг кривых L и L_1.

Пусть $\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma}_1$ обозначают орты, расположенные соответственно на касательных к кривым L и L_1 в точке M.

Если $\bar{\beta}$ обозначает орт градиента поверхности в данной точке, то

$$\bar{p} = p\bar{\beta}$$

и

$$(1)\quad \frac{d\bar{p}}{ds} = p\frac{d\bar{\beta}}{ds} + \frac{dp}{ds}\bar{\beta}$$

$$(2)\quad \frac{d\bar{p}}{ds_1} = p\frac{d\bar{\beta}}{ds_1} + \frac{dp}{ds_1}\bar{\beta}.$$

Перемножая равенства (1) и (2) векториально имеем, что

$$(3)\quad \left\{\frac{d\bar{p}}{ds}\cdot\frac{d\bar{p}}{ds_1}\right\} = p^2\left\{\frac{d\bar{\beta}}{ds}\cdot\frac{d\bar{\beta}}{ds_1}\right\} + \frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{ds}\left\{\bar{\beta}\cdot\frac{d\bar{\beta}}{ds_1}\right\} + \frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{ds_1}\left\{\frac{d\bar{\beta}}{ds}\cdot\bar{\beta}\right\}.$$

Помножая векториально равенства (1) и (2) на $\bar{\beta}$ имеем, что

$$\left\{\bar{\beta}\cdot\frac{d\bar{p}}{ds}\right\} = p\left\{\bar{\beta}\cdot\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right\}$$

и

$$\left\{\bar{p}\cdot\frac{d\bar{p}}{ds}\right\} = p^2\left\{\bar{\beta}\cdot\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right\}$$

и также

$$\left\{\bar{p}\cdot\frac{d\bar{p}}{ds_1}\right\} = p^2\left\{\bar{\beta}\cdot\frac{d\bar{p}}{ds_1}\right\}.$$

Таким образом,

$$p^4\left\{\frac{d\bar{\beta}}{ds}\cdot\frac{d\bar{\beta}}{ds_1}\right\} = p^2\left\{\frac{d\bar{p}}{ds}\cdot\frac{d\bar{p}}{ds_1}\right\} - \frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{ds}\left\{\bar{p}\cdot\frac{d\bar{p}}{ds_1}\right\} + \frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{ds_1}\left\{\bar{p}\cdot\frac{d\bar{p}}{ds}\right\}.$$

Умножив обе части равенства геометрически на орт i_3 будем иметь, что

$$(4)\quad p^4\left(i_3\cdot\left\{\frac{d\bar\beta}{ds}\cdot\frac{d\bar\beta}{ds_1}\right\}\right)=p^2\left(i_3\cdot\left\{\frac{d\bar p}{ds}\cdot\frac{d\bar p}{ds_1}\right\}\right)-\frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{ds}\left(i_3\cdot\left\{\bar p\cdot\frac{d\bar p}{ds_1}\right\}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{ds_1}\left(i_3\cdot\left\{\bar p\cdot\frac{d\bar p}{ds}\right\}\right).$$

Так как

$$\left\{\bar p\cdot\frac{d\bar p}{ds}\right\}=\begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3\\ -P, & -\theta, & 1\\ -\frac{dP}{ds}, & -\frac{d\theta}{ds}, & 0\end{vmatrix}$$

и

$$\frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{ds}=P\frac{dP}{ds}+\theta\frac{d\theta}{ds},$$

то следовательно,

$$-\frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{ds}\left(i_3\cdot\left\{\bar p\cdot\frac{d\bar p}{ds_1}\right\}\right)=-\left(P\frac{dP}{ds}+\theta\frac{d\theta}{ds}\right)\left(P\frac{d\theta}{ds_1}-\theta\frac{dP}{ds_1}\right)$$

и также,

$$\frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{ds_1}\left(i_3\cdot\left\{\bar p\cdot\frac{d\bar p}{ds}\right\}\right)=\left(P\frac{dP}{ds_1}+\theta\frac{d\theta}{ds_1}\right)\left(P\frac{d\theta}{ds}-\theta\frac{dP}{ds}\right)$$

и следовательно, сумма двух последних членов в правой части равенства (4) будет равна

$$-P^2\left(\frac{dP}{ds}\frac{d\theta}{ds_1}-\frac{dP}{ds_1}\frac{d\theta}{ds}\right)-\theta^2\left(\frac{d\theta}{ds_1}\frac{dP}{ds}-\frac{d\theta}{ds}\frac{dP}{ds_1}\right)=$$

$$=-(P^2+\theta^2)\left(i_3\cdot\left\{\frac{d\bar p}{ds}\cdot\frac{d\bar p}{ds_1}\right\}\right),$$

так как

$$\left\{\frac{d\bar p}{ds}\cdot\frac{d\bar p}{ds_1}\right\}=\begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3\\ -\frac{dP}{ds}, & -\frac{d\theta}{ds}, & 0\\ -\frac{dP}{ds_1}, & -\frac{d\theta}{ds_1}, & 0\end{vmatrix}.$$

Таким образом, имеем, что

$$p^4\left(i_3\cdot\left\{\frac{d\bar\beta}{ds}\cdot\frac{d\bar\beta}{ds_1}\right\}\right)=\left(i_3\cdot\left\{\frac{d\bar p}{ds}\cdot\frac{d\bar p}{ds_1}\right\}\right),$$

так как

$$p^2-P^2-\theta^2=1.$$

Так как

$$\frac{d\bar p}{ds}=\frac{\partial\bar p}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds}+\frac{\partial\bar p}{\partial y_1}\frac{dy_1}{ds},\quad \frac{d\bar p}{ds_1}=\frac{\partial\bar p}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds_1}+\frac{\partial\bar p}{\partial y_1}\frac{dy_1}{ds_1},$$

то

$$\left\{\frac{d\bar p}{ds}\cdot\frac{d\bar p}{ds_1}\right\}=\left(\frac{dx_1}{ds}\frac{dy_1}{ds_1}-\frac{dx_1}{ds_1}\frac{dy_1}{ds}\right)\left\{\frac{\partial\bar p}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\bar p}{\partial y_1}\right\}.$$

Так как

$$\bar\sigma=\frac{dx_1}{ds}i_1+\frac{dy_1}{ds}i_2+\frac{dz_1}{ds}i_3,\quad \bar\sigma_1=\frac{dx_1}{ds_1}i_1+\frac{dy_1}{ds_1}i_2+\frac{dz_1}{ds_1}i_3,$$

то

$$\frac{dx_1}{ds}\cdot\frac{dy_1}{ds_1}-\frac{dx_1}{ds_1}\frac{dy_1}{ds}=(i_3\cdot\{\bar\sigma\cdot\bar\sigma_1\}).$$

Как видели

$$\left\{\frac{\partial\bar p}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\bar p}{\partial y_1}\right\}=(AE-B^2)i_3.$$

Таким образом, имеем, что

$$p^4\left(i_3\cdot\left\{\frac{d\bar\beta}{ds}\cdot\frac{d\bar\beta}{ds_1}\right\}\right)=(i_3\cdot\{\bar\sigma\cdot\bar\sigma_1\})(AE-B^2)$$

и следовательно

(27) $$\mu=\frac{AE-B^2}{p^4}=\frac{\left(i_3\cdot\left\{\frac{d\bar\beta}{ds}\cdot\frac{d\bar\beta}{ds_1}\right\}\right)}{(i_3\cdot\{\bar\sigma\cdot\bar\sigma_1\})}.$$

Произведение

$$\left(i_3\cdot\left\{\frac{d\bar\beta}{ds}\cdot\frac{d\bar\beta}{ds_1}\right\}\right)$$

есть проекция на плоскость x_1, y_1 площади параллелограмма, построенного на векторах

$$\frac{d\bar\beta}{ds}\text{ и }\frac{d\bar\beta}{ds_1}.$$

Произведение $(\bar{i}_3 \cdot \{\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}_1\})$ проекция на плоскость x_1, y_1 площади параллелограмма, построенного на ортах $\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma}_1$.

Так как левая часть равенства (27) зависит только от координат точки M, то отношение таких проекций есть величина постоянная для данной точки поверхности и не зависит от кривых L и L_1, проведенных на поверхности через данную точку.

Так как

$$\left(\frac{d\bar{\beta}}{ds} \cdot \bar{\beta}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\bar{\beta}}{ds_1} \cdot \bar{\beta}\right) = 0,$$

то векторы

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} \text{ и } \frac{d\bar{\beta}}{ds_1}$$

расположены в касательной плоскости к поверхности в данной точке.

Таким образом, кривизна Гаусса в данной точке поверхности будет отношением площадей параллелограммов, расположенных в плоскости касательной к поверхности в данной точке и построенных соответственно на векторах

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}, \quad \frac{d\bar{\beta}}{ds_1}$$

и на касательных ортах $\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma}_1$ к двум произвольным кривым, проведенным на поверхности через данную точку.

Кривизна μ будет положительной, если векторы

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}, \quad \frac{d\bar{\beta}}{ds_1}$$

и орты $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ одинаково ориентированы. Если же векторы

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}, \quad \frac{d\bar{\beta}}{ds_1}$$

и орты $\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma}_1$ различно ориентированы, то кривизна будет отрицательной.

15. Если координаты

$$q_1 = x_1, \; q_2 = x_2, \; q_3 = x_3$$

прямолинейные и ортогональные и поверхность задана уравнениями

$$x_1 = \psi_1(u_1, u_2), \; y_1 = \psi_2(u_1, u_2), \; z_1 = \psi_3(u_1, u_2),$$

где u_1, u_2 независимые переменные параметры, то обозначив

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} = a_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u_1} = a_2, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u_1} = a_3$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_2} = b_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u_2} = b_2, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u_2} = b_3,$$

введем в рассмотрение векторы

$$\overline{m} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3, \quad \overline{l} = b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3,$$

которые, очевидно, расположены в плоскости, касательной к поверхности в данной точке, так как векторы $\overline{m}$ и $\overline{l}$ направлены соответственно по касательным к тем кривым, проведенным на поверхности через данную точку, для которых параметры u_1 или u_2 будут постоянными.

Если, исключив из уравнений

$$x_1 = \psi_1(u_1, u_2), \; y_1 = \psi_2(u_1, u_2), \; z_1 = \psi_3(u_1, u_2)$$

параметры u_1, u_2 представить уравнение поверхности в виде

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

то градиент поверхности $\overline{p}$ будет

$$\overline{p} = \varphi_1 i_1 + \varphi_2 i_2 + \varphi_3 i_3$$

и так как градиент $\overline{p}$ перпендикулярен к касательной плоскости, то

$$(\overline{p} \cdot \overline{m}) = 0, \; (\overline{p} \cdot \overline{l}) = 0;$$

и следовательно

$$a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 = 0$$

$$b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 \varphi_3 = 0,$$

откуда

$$\frac{\varphi_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2} = \frac{\varphi_2}{b_1 a_3 - a_1 b_3} = \frac{\varphi_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2}.$$

Обозначив

$$A_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad A_2 = b_1 a_3 - b_3 a_1, \quad A_3 = a_1 b_2 - b_1 a_2,$$

$$\Delta = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2},$$

имеем, что

(28) $$\varphi_1 = \pm \frac{p}{\Delta} A_1, \quad \varphi_2 = \pm \frac{p}{\Delta} A_2, \quad \varphi_3 = \pm \frac{p}{\Delta} A_3.$$

Если в таких формулах надо выбрать знак $+$, то рассмотрим вектор

$$\bar{p}_1 = \{\bar{m} \cdot \bar{l}\} = \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix} = A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3.$$

Если же в равенствах (28) надо выбрать знак $-$, то рассмотрим вектор

$$\bar{p}_1 = \{\bar{l} \cdot \bar{m}\}.$$

Из формул (28), при положительном знаке, имеем, что

$$\bar{p} = \frac{p}{\Delta}[A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3] = \frac{p}{\Delta}\bar{p}_1$$

и формула (20) принимает вид

$$\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{p^2}{\Delta^2} \frac{\left(\bar{p}_1 \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z_1}\right\}\right) A_1 + \left(\bar{p}_1 \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}\right\}\right) A_2 + \left(\bar{p}_1 \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1}\right\}\right) A_3}{p^4}$$

Перемножая векториально равенства

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial u_1} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1} a_2 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z_1} a_3, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial u_2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1} b_2 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z_1} b_3$$

имеем, что

$$\left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial u_2}\right\} = \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z_1}\right\} A_1 + \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}\right\} A_2 + \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_1}\right\} A_3.$$

Так как

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial u_1} = \frac{p}{\Delta}\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial u_1} + \bar{p}_1 \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{p}{\Delta}\right), \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial u_2} = \frac{p}{\Delta}\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial u_2} + \bar{p}_1 \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{p}{\Delta}\right),$$

то следовательно

$$\left(\bar{p}_1 \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial u_2}\right\}\right) = \frac{p^2}{\Delta^2}\left(\bar{p}_1 \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial u_2}\right\}\right).$$

Таким образом, имеем, что

(29a) $$\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{\left(\bar{p}_1 \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial u_2}\right\}\right)}{\Delta^4}.$$

Так как $\bar{p}_1 = \Delta\bar{\beta}$, то

$$\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial u_1} = \Delta \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_1} + \frac{\partial \Delta}{\partial u_1}\bar{\beta}, \quad \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial u_2} = \Delta \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_2} + \frac{\partial \Delta}{\partial u_2}\bar{\beta}$$

и следовательно

$$\left(\bar{p}_1 \cdot \left\{\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial u_2}\right\}\right) = \Delta^3\left(\bar{\beta} \cdot \left\{\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_2}\right\}\right)$$

и

(29) $$\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{\left(\bar{\beta} \cdot \left\{\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_2}\right\}\right)}{\Delta}.$$

Произведение

$$\left(\bar{\beta} \cdot \left\{\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_2}\right\}\right)$$

равно площади параллелограмма, построенного на векторах

$$\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_2}$$

и расположенного в плоскости касательной к поверхности, так как

$$\left(\bar{\beta} \cdot \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_1}\right) = 0, \quad \left(\bar{\beta} \cdot \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_2}\right) = 0.$$

Величина Δ есть численное значение векториального произведения $\{\overline{m}\cdot\overline{l}\}$ и равно площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{m}$ и $\overline{l}$, расположенных в касательной плоскости.

16. Имеем, что

$$\left(\overline{p}_1\cdot\left\{\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right\}\right)=\left(\{\overline{m}\cdot\overline{l}\}\cdot\left\{\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right\}\right)=$$

$$=\left(\overline{l}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial u_2}\right)\left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_1}\right)-\left(\overline{l}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_1}\right)\left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right)=$$

$$=\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\right)\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right)-\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_1}\right)\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_2}\right),$$

так как

$$(\overline{p}_1\cdot\overline{l})=0,\ (\overline{p}_1\cdot\overline{m})=0$$

и следовательно, из формулы (29а) приходим к формуле данной Гауссом, в главе VIII мемуара «Disquisitiones generales circa superficies curvas».

$$(30)\qquad \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\right)\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right)-\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_1}\right)^2}{\Delta^4}=\frac{DD_2-D_1^2}{(A_1^2+A_2^2+A_3^2)^2},$$

где

$$D=\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right)=A_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2}+A_2\frac{\partial^2 y_1}{\partial u_1^2}+A_3\frac{\partial^2 z_1}{\partial u_1^2},$$

$$D_2=\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\right)=A_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_2^2}+A_2\frac{\partial^2 y_1}{\partial u_2^2}+A_3\frac{\partial^2 z_1}{\partial u_2^2},$$

$$D_1=\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_1}\right)=A_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1\,\partial u_2}+A_2\frac{\partial^2 y_1}{\partial u_1\,\partial u_2}+A_3\frac{\partial^2 z_1}{\partial u_1\,\partial u^2}.$$

17. Если координаты

$$q_1=x_1,\ q_2=x_2,\ q_3=x_3$$

прямолинейные и ортогональные, то, как видели,

$$\overline{a}=i_1,\ \overline{b}=i_2,\ \overline{e}=i_3,\ \omega=1$$

и коэффициент B в уравнении (19) принимает вид

$$B=\left[\left(\bar{p}\cdot\left\{i_3\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\right\}\right)+\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\cdot i_2\right\}\right)\right]\varphi_1+$$
$$+\left[\left(\bar{p}\cdot\left\{i_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\right\}\right)+\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\cdot i_3\right\}\right)\right]\varphi_2+$$
$$+\left[\left(\bar{p}\cdot\left\{i_2\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\right\}\right)+\left(\bar{p}\cdot\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\cdot i_1\right\}\right)\right]\varphi_3.$$

Если поверхность задана уравнениями

$$x_1=\psi_1(u_1, u_2),\ y_1=\psi_2(u_1, u_2),\ z_1=\psi_3(u_1, u_2),$$

то пользуясь формулами

$$\varphi_1=\frac{p}{\Delta}A_1,\quad \varphi_2=\frac{p}{\Delta}A_2,\quad \varphi_3=\frac{p}{\Delta}A_3,\quad \bar{p}=\frac{p}{\Delta}\bar{p}_1,$$

перепишем коэффициент B в виде

$$\frac{\Delta^2}{p^2}B=\left[\left(\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\right\}\cdot i_2\right)-\left(\left\{\bar{p}_1\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\right\}\cdot i_3\right)\right]A_1+$$
$$+\left[\left(\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\right\}\cdot i_3\right)-\left(\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\right\}\cdot i_1\right)\right]A_2+$$
$$+\left[\left(\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\right\}\cdot i_1\right)-\left(\left\{\bar{p}_1\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\right\}\cdot i_2\right)\right]A_3=$$
$$=\left(\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\right\}\cdot[A_2 i_3-A_3 i_2]\right)+\left(\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\right\}\cdot[A_3 i_1-A_1 i_3]\right)+$$
$$+\left(\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\right\}\cdot[A_1 i_2-A_2 i_1]\right).$$

Так как

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial u_1}=\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}a_1+\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}a_2+\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}a_3,\quad \frac{\partial\bar{p}}{\partial u_2}=\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}b_1+\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}b_2+\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}b_3,$$

то

$$\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial u_2}\right\}=\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\right\}b_1+\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\right\}b_2+\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\right\}b_3$$
$$\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial u_1}\right\}=\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1}\right\}a_1+\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial y_1}\right\}a_2+\left\{\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{p}}{\partial z_1}\right\}a_3.$$

Умножая первое равенство геометрически на $\overline{m}$, второе на $\overline{l}$ и вычитая, имеем, что

$$\left(\overline{m}\cdot\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial u_2}\right\}\right)-\left(\overline{l}\cdot\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial u_1}\right\}\right)=\left(\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_1}\right\}\cdot[\overline{m}b_1-\overline{l}a_1]\right)+$$
$$+\left(\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial y_1}\right\}\cdot[\overline{m}b_2-\overline{l}a_2]\right)+\left(\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial z_1}\right\}\cdot[\overline{m}b_3-\overline{l}a_3]\right).$$

Легко видеть, что

$$\overline{m}b_1-\overline{l}a_1=A_2i_3-A_3i_2,\quad \overline{m}b_2-\overline{l}a_2=A_3i_1-A_1i_3,$$
$$\overline{m}b_3-\overline{l}a_3=A_1i_2-A_2i_1.$$

Таким образом, имеем, что

$$\frac{\Delta^2}{p^2}B=\left(\overline{m}\cdot\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial u_2}\right\}\right)-\left(\overline{l}\cdot\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial u_1}\right\}\right).$$

Так как

$$\overline{p}=\frac{p}{\Delta}\overline{p}_1\quad \frac{\partial\overline{p}}{\partial u_1}=\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{p}{\Delta}\right)\overline{p}_1+\frac{p}{\Delta}\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_1},$$

то

$$\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial u_1}\right\}=\frac{p}{\Delta}\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_1}\right\}$$

и так же

$$\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial u_2}\right\}=\frac{p}{\Delta}\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right\},$$

следовательно

$$\frac{\Delta^2}{p^2}B=\frac{p}{\Delta}\left[\left(\overline{m}\cdot\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right\}\right)-\left(\overline{l}\cdot\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_1}\right\}\right)\right].$$

Таким образом, для средней кривизны имеем формулу

(31) $$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\left(\overline{m}\cdot\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right\}\right)-\left(\overline{l}\cdot\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_1}\right\}\right)}{\Delta^3}.$$

Из формулы (31) имеем формулу Миндинга.

Действительно

$$\left(\overline{m}\cdot\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right\}\right)=\left(\left\{\overline{m}\cdot\overline{p}_1\right\}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right)=\left(\left\{\overline{m}\cdot\left\{\overline{m}\cdot\overline{l}\right\}\right\}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right)=$$

$$=\left(\overline{m}\cdot\overline{l}\right)\left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right)-m^2\left(\overline{l}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right)=m^2\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\right)-\left(\overline{m}\cdot\overline{l}\right)\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_2}\right),$$

так как из равенств

$$\left(\overline{m}\cdot\overline{p}_1\right)=0,\quad\left(\overline{l}\cdot\overline{p}_1\right)=0$$

видно, что

$$\left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right)=-\left(\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_2}\cdot\overline{p}_1\right),\quad\left(\overline{l}\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_2}\right)=-\left(\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\cdot\overline{p}_1\right).$$

Так же имеем, что

$$\left(\overline{l}\cdot\left\{\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{p}_1}{\partial u_1}\right\}\right)=\left(\overline{l}\cdot\overline{m}\right)\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_1}\right)-l^2\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right)$$

и следовательно

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{m^2\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\right)+l^2\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right)-2\left(\overline{m}\cdot\overline{l}\right)\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_2}\right)}{\left(A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)^{\frac{3}{2}}},\tag{32}$$

где

$$m^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,\quad l^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2,$$

$$\left(\overline{m}\cdot\overline{l}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\quad\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\right)=A_1\frac{\partial b_1}{\partial u_2}+A_2\frac{\partial b_2}{\partial u_2}+A_3\frac{\partial b_3}{\partial u_2},$$

$$\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right)=A_1\frac{\partial a_1}{\partial u_1}+A_2\frac{\partial a_2}{\partial u_1}+A_3\frac{\partial a_3}{\partial u_1},$$

$$\left(\overline{p}_1\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_2}\right)=A_1\frac{\partial a_1}{\partial u_2}+A_2\frac{\partial a_2}{\partial u_2}+A_3\frac{\partial a_3}{\partial u_2}.$$

19. Величины D, D_1, D_2 в формуле (30) можно представить в виде определителей

$$D=\left(\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{m}}{\partial u_1}\right)=\left(\bar{m}\cdot\left\{\bar{l}\cdot\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_1}\right\}\right)=\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3\\ b_1, & b_2, & b_3\\ \frac{\partial a_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial a_2}{\partial u_1}, & \frac{\partial a_3}{\partial u_1}\end{vmatrix}$$

$$D_2=\left(\bar{p}_1\cdot\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_2}\right)=\left(\bar{m}\cdot\left\{\bar{l}\cdot\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_2}\right\}\right)=\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3\\ b_1, & b_2, & b_3\\ \frac{\partial b_1}{\partial u_2}, & \frac{\partial b_2}{\partial u_2}, & \frac{\partial b_3}{\partial u_2}\end{vmatrix}.$$

По правилу умножения определителей будем иметь, что

$$DD_2=\begin{vmatrix} m^2, & (\bar{m}\cdot\bar{l}), & \left(\bar{m}\cdot\frac{\partial\bar{m}}{\partial u_1}\right)\\ (\bar{m}\cdot\bar{l}), & l^2, & \left(\bar{l}\cdot\frac{\partial\bar{m}}{\partial u_1}\right)\\ \left(\bar{m}\cdot\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_2}\right), & \left(\bar{l}\cdot\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_2}\right), & \left(\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial\bar{m}}{\partial u_1}\right)\end{vmatrix}.$$

Так же имеем, что

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3\\ b_1, & b_2, & b_3,\\ \frac{\partial b_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial b_2}{\partial u_1}, & \frac{\partial b_3}{\partial u_1}\end{vmatrix}$$

и

$$D_1^2=\begin{vmatrix} m^2, & (\bar{m}\cdot\bar{l}), & \left(\bar{m}\cdot\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_1}\right)\\ (\bar{m}\cdot\bar{l}), & l^2, & \left(\bar{l}\cdot\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_1}\right)\\ \left(\bar{m}\cdot\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_1}\right), & \left(\bar{l}\cdot\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_1}\right), & \left(\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\bar{l}}{\partial u_1}\right)\end{vmatrix}.$$

Введем обозначения Гаусса

$$m^2 = E, \quad l^2 = G, \quad (\overline{m}\cdot\overline{l}) = F.$$

Имеем следовательно, что

$$\left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_1}, \quad \left(\overline{l}\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_1}\right) + \left(\overline{l}\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2} + \left(\overline{l}\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right),$$

так как $\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_1} = \frac{\partial\overline{m}}{\partial u_2}$;

$$\frac{\partial F}{\partial u_2} = \left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\right) + \left(\overline{l}\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_2}\right) = \left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_1}.$$

Таким образом

$$\left(\overline{l}\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2}, \quad \left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\right) = \frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_1}$$

и легко видеть, что

$$\left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_1}\right) = \left(\overline{m}\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2}.$$

Произведение DD_2 перепишется так:

$$DD_2 = \begin{vmatrix} E, & F, & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_1} \\ F, & G, & \frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_1}, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_2}, & \left(\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_1}\left[\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u_2} - G\frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u_1}\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_2}\right]\left[F\frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u_1} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial u_2}\right] + \left(\frac{\partial\overline{l}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial u_1}\right)[EG - F^2];$$

и

$$D_1^2 = \begin{vmatrix} E, & F, & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2} \\ F, & G, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2}, & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_1}, & \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_1}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2}\left[\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u_1} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u_2}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_1}\left[\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u_2} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial u_1}\right] + \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_1}\right)[GE - F^2]$$

и следовательно

$$DD_2 - D_1^2 = E\left[\frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial u_2}\frac{\partial G}{\partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial G}{\partial u_2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial G}{\partial u_1}\right)^2\right] +$$

$$+ G\left[\frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial u_1}\frac{\partial G}{\partial u_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E}{\partial u_2}\right)^2\right] +$$

$$+ F\left[\frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial u_1}\frac{\partial G}{\partial u_2} + \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2}\frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial G}{\partial u_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial G}{\partial u_1}\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \bar{m}}{\partial u_1}\right) - \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_1}\right)\right][EG - F^2].$$

Так как

$$\frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 \bar{m}}{\partial u_2 \partial u_1}, \quad \frac{\partial^2 \bar{m}}{\partial u_2^2} = \frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial u_1 \partial u_2},$$

то

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u_2^2} + \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \bar{m}}{\partial u_1}\right) + \left(\bar{l}\cdot\frac{\partial^2 \bar{m}}{\partial u_1 \partial u_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u_2^2} + \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \bar{m}}{\partial u_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2} - \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_1}\right)$$

и

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_2 \partial u_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \bar{m}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_2}\right) + \left(\bar{m}\cdot\frac{\partial^2 \bar{l}}{\partial u_2 \partial u_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \bar{m}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u_2^2} - \left(\frac{\partial \bar{m}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \bar{m}}{\partial u_2}\right).$$

Складывая такие равенства имеем, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_2 \partial u_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2} = \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \bar{m}}{\partial u_1}\right) - \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{l}}{\partial u_1}\right).$$

Таким образом из формулы (30) имеем знаменитую формулу Гаусса данную в главе XI.

$$4(EG - F^2)^2\mu = E\left[\frac{\partial E}{\partial u_2}\frac{\partial G}{\partial u_2} - 2\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial G}{\partial u_2} + \left(\frac{\partial G}{\partial u_1}\right)^2\right] +$$

$$+ G\left[\frac{\partial E}{\partial u_1}\frac{\partial G}{\partial u_1} - 2\frac{\partial E}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} + \left(\frac{\partial E}{\partial u_2}\right)^2\right] +$$

$$+ F\left[\frac{\partial E}{\partial u_1}\frac{\partial G}{\partial u_2} + 4\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} - 2\frac{\partial E}{\partial u_2}\frac{\partial F}{\partial u_2} - 2\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial G}{\partial u_1} - \frac{\partial E}{\partial u_2}\frac{\partial G}{\partial u_1}\right] +$$

$$+ 2(EG - F^2)\left[2\frac{\partial^2 F}{\partial u_2 \partial u_1} - \frac{\partial^2 E}{\partial u_2^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2}\right],$$

где μ кривизна Гаусса поверхности в данной точке.

20. Как видели, если координаты $q_1 = x_1$, $q_2 = y_2$, $q_3 = z_3$ прямолинейные, ортогональные и поверхность задана уравнением $z_1 = \varphi(x_1 y_1)$, то градиент поверхности $\bar{p}$ будет

$$\bar{p} = -Pi_1 - \theta i_2 + i_3.$$

Пусть s длина дуги какого-нибудь нормального сечения поверхности в данной точке. Обозначим:

$$\frac{dx_1}{ds} = u_1, \quad \frac{dy_1}{ds} = u_2, \quad \frac{dz_1}{ds} = u_3.$$

Если $\bar{\sigma}$ орт, направленный по касательной к нормальному сечению, то

$$\bar{\sigma} = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3.$$

Имеем, что

$$Au_1 + Bu_2 = \frac{dP}{ds}, \quad Bu_1 + Eu_2 = \frac{d\theta}{ds}, \text{ где } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad E = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Так как

$$\frac{v^2 p}{R} = -\left(\frac{d\bar{p}}{dt} \cdot \bar{v}\right),$$

то

$$\frac{p}{R} = -\left(\frac{d\bar{p}}{ds} \cdot \bar{\sigma}\right),$$

где

$$\frac{d\bar{p}}{ds} = -\frac{dP}{ds} i_1 - \frac{d\theta}{ds} i_2 = -(Au_1 + Bu_2) i_1 - (Bu_1 + Eu_2) i_2.$$

Таким образом, имеем, что

$$\frac{p}{R} = Au_1^2 + 2Bu_1 u_2 + Eu_2^2. \tag{33}$$

Так как

$$(\bar{p} \cdot \bar{\sigma}) = 0,$$

то

$$u_3 = Pu_1 + \theta u_2$$

и

$$\bar{\sigma} = u_1 i_1 + u_2 i_2 + (Pu_1 + \theta u_2) i_3.$$

Из равенства

$$(\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}) = 1,$$

видно, что

$$u_1^2 + u_2^2 + (Pu_1 + \theta u_2)^2 = 1.$$

Умножив такое равенство на A, сложим с функцией (33) и приравняем нулю частные производные по u_1 и по u_2.

Таким образом, имеем, что

$$[(P^2 + 1)\lambda - A] u_1 + [P\theta\lambda - B] u_2 = 0,$$

$$[P\theta\lambda - B] u_1 + [(\theta^2 + 1)\lambda - E] u_2 = 0$$

и следовательно

$$[(P^2 + 1) u_1 + P\theta u_2] \lambda = \frac{dP}{ds}, \quad [(\theta^2 + 1) u_2 + P\theta u_1] \lambda = \frac{d\theta}{ds},$$

где s длина дуги главного нормального сечения.

Обозначив

$$\bar{l} = i_2 + \theta i_3, \quad \bar{b} = i_1 + P i_3,$$

имеем

$$(P^2 + 1) u_1 + P\theta u_2 = (\bar{\sigma} \cdot \bar{b}), \quad (\theta^2 + 1) u_2 + P\theta u_1 = (\bar{\sigma} \cdot \bar{l})$$

и

$$\frac{\frac{dP}{ds}}{(\bar{\sigma} \cdot \bar{b})} = \frac{\frac{d\theta}{ds}}{(\bar{\sigma} \cdot \bar{l})}, \quad \frac{dP}{ds}(\bar{\sigma} \cdot \bar{l}) - \frac{d\theta}{ds}(\bar{\sigma} \cdot \bar{b}) = \left(\left[\frac{dP}{ds}\bar{l} - \frac{d\theta}{ds}\bar{b}\right] \cdot \bar{\sigma}\right) = 0.$$

Так как

$$\frac{dP}{ds} l - \frac{a\theta}{ds} \bar{b} = \frac{dP}{ds}(i_2 + \theta i_3) - \frac{d\theta}{ds}(i_1 + P i_3) = \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3 \\ -\frac{dP}{ds}, & -\frac{d\theta}{ds}, & 0 \\ -P, & -\theta, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{\frac{d\bar{p}}{ds} \cdot \bar{p}\right\},$$

то

$$\left(\bar{\sigma} \cdot \left\{\frac{d\bar{p}}{ds} \cdot \bar{p}\right\}\right) = 0,$$

где $\bar{\sigma}$ орт касательный к главному нормальному сечению, а s длина дуги того же главного нормального сечения.

Пусть s_1 длина дуги какой-нибудь линии кривизны, проходящей через точку M поверхности, а s длина дуги того главного нормального сечения в точке M, которого касается в точке M линия кривизны.

Так как в точке M

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dy_1}{ds_1} = \frac{dy_1}{ds}, \quad \frac{dz_1}{ds_1} = \frac{dz_1}{ds},$$

то

$$\frac{d\bar{p}}{ds_1} = -\frac{dP}{ds_1} i_1 - \frac{d\theta}{ds_1} i_2 = -\left[A\frac{dx_1}{ds_1} + B\frac{dy_1}{ds_1}\right] i_1 - \left[B\frac{dx_1}{ds_1} + E\frac{dy_1}{ds_1}\right] i_2 =$$

$$= -\frac{dP}{ds} i_1 - \frac{d\theta}{ds} i_2 = \frac{d\bar{p}}{ds}.$$

Таким образом, для всякой точки линии кривизны имеет место равенство

$$(34) \qquad \left(\bar{\sigma} \cdot \left\{\frac{d\bar{p}}{ds_1} \cdot \bar{p}\right\}\right) = 0$$

или

$$(34a) \qquad \left(\bar{\sigma} \cdot \left\{\frac{d\bar{\beta}}{ds_1} \cdot \bar{\beta}\right\}\right) = 0,$$

которое представляет векториальную форму дифференциального уравнения линии кривизны.

Из формулы (34) видно, что в каждой точке линии кривизны поверхности три вектора $\bar{\sigma}$, $\bar{p}$, $\frac{d\bar{p}}{ds_1}$ должны быть расположены в одной плоскости.

21. Формулу (33) кривизны нормального сечения можно переписать так:

$$\frac{p}{R} = (Au_1 + Bu_2)\,u_1 + (Bu_1 + Eu_2)\,u_2 = \frac{dP}{ds}\,u_1 + \frac{d\theta}{ds}\,u_2$$

и следовательно перемножая геометрически векторы $\frac{d\bar{p}}{ds}$ и $\bar{\sigma}$ имеем, что

$$\frac{p}{R} = -\left(\frac{d\bar{p}}{ds} \cdot \bar{\sigma}\right)$$

или

$$(35) \qquad \frac{1}{R} = -\left(\frac{d\bar{\beta}}{ds} \cdot \bar{\sigma}\right),$$

Докажем формулу Олинда Родрига

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -\frac{1}{R} \cdot \bar{\sigma},$$

где R — радиус кривизны одного из главных нормальных сечений в данной точке поверхности, s длина дуги главного нормального сечения или длина дуги линии кривизны, касающейся данного главного нормального сечения в данной точке, σ — орт направленный по касательной к линии кривизны.

Действительно, переписав равенство (34a) в виде

$$\left(\frac{d\bar{\beta}}{ds} \cdot \{\bar{\beta} \cdot \bar{\sigma}\}\right) = 0,$$

имеем, что вектор $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ перпендикулярен к вектору $\{\bar{\beta}\cdot\bar{\sigma}\}$ и следовательно расположен в плоскости векторов $\bar{\beta}$ и $\bar{\sigma}$.

Так как $(\bar{\beta}\cdot\bar{\beta})=1$ и

$$\left(\frac{d\bar{\beta}}{ds}\cdot\bar{\beta}\right)=0,$$

то вектор $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ перпендикулярен к орту $\bar{\beta}$ и следовательно должен совпадать по направлению с ортом $\bar{\sigma}$ или с прямо противоположным направлением.

Таким образом

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}=m\bar{\sigma}.$$

Для определения m, умножим равенство геометрически на $\bar{\sigma}$. По формуле (35) имеем, что $m=-\frac{1}{R}$ и следовательно

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}=-\frac{1}{R}\bar{\sigma}. \tag{36}$$

Если $\bar{\varepsilon}$ — орт, направленный по главной нормали к главному нормальному сечению в данной точке поверхности, то по формулам Френе, имеем, что

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}=-\frac{1}{R}\bar{\sigma}.$$

Таким образом, орты $\bar{\beta}$ и $\bar{\varepsilon}$ имеют равные геометрические производные по дуге главного нормального сечения.

22. Пользуясь формулами (35) или (36) можно доказать многие теоремы, относящиеся к учению о линиях кривизны поверхности.

Докажем такую известную теорему.

Если две поверхности имеют общую линию кривизны, то вдоль такой кривой поверхности пересекаются под постоянным углом.

Действительно, пусть M какая-нибудь точка общей линии кривизны, $\bar{\beta}$ и $\bar{\beta}_1$ — орты, направленные по нормалям к той и другой поверхности в точке M, σ — орт, направленный по касательной к общей линии кривизны.

Векторы $\bar{\beta}$, $\bar{\beta}_1$, $\{\bar{\beta}\cdot\bar{\sigma}\}$ очевидно перпендикулярны к орту $\bar{\sigma}$ и следовательно расположены в нормальной плоскости линии кривизны.

Пусть φ будет угол между ортами $\overline{\beta}$ и $\overline{\beta}_1$, ψ угол между $\overline{\beta}_1$ и вектором $\{\overline{\beta} \cdot \overline{\sigma}\}$, равным по численной величине, 1.

Имеем, что

$$\cos\psi = \sin\varphi = (\overline{\beta}_1 \cdot \{\overline{\beta} \cdot \overline{\sigma}\}).$$

Дифференцируя по s, где s длина дуги общей линии кривизны имеем, что

$$\frac{d\sin\varphi}{ds} = \left(\frac{d\overline{\beta}_1}{ds} \cdot \{\overline{\beta} \cdot \overline{\sigma}\}\right) + \left(\overline{\beta}_1 \cdot \left\{\frac{d\overline{\beta}}{ds} \cdot \overline{\sigma}\right\}\right) + \left(\overline{\beta}_1 \cdot \left\{\overline{\beta} \cdot \frac{d\overline{\sigma}}{ds}\right\}\right).$$

Так как

$$\frac{d\overline{\beta}_1}{ds} = -\frac{1}{R_1}\overline{\sigma}, \quad \frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\frac{1}{R}\overline{\sigma},$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны соответствующих главных нормальных сечений в точке M той и другой поверхности, то

$$\left(\frac{d\overline{\beta}_1}{ds} \cdot \{\overline{\beta} \cdot \overline{\sigma}\}\right) = 0, \quad \left(\overline{\beta}_1 \cdot \left\{\frac{d\overline{\beta}}{ds} \cdot \overline{\sigma}\right\}\right) = 0.$$

Так как $(\overline{\sigma} \cdot \overline{\sigma}) = 1$ и

$$\left(\frac{d\overline{\sigma}}{ds} \cdot \overline{\sigma}\right) = 0,$$

то вектор $\frac{d\overline{\sigma}}{ds}$ перпендикулярен к орту $\overline{\sigma}$. Вектор $\{\overline{\beta}_1 \cdot \overline{\beta}\}$ очевидно параллелен орту $\overline{\sigma}$ и векторы $\frac{d\overline{\sigma}}{ds}$ и $\{\overline{\beta}_1 \cdot \overline{\beta}\}$ взаимно перпендикулярны.

Таким образом,

$$\left(\overline{\beta}_1 \cdot \left\{\overline{\beta} \cdot \frac{d\overline{\sigma}}{ds}\right\}\right) = \left(\frac{d\overline{\sigma}}{ds} \cdot \{\overline{\beta}_1 \cdot \overline{\beta}\}\right) = 0$$

и

$$\frac{d\sin\varphi}{ds} = 0$$

и следовательно угол φ, вдоль общей линии кривизны постоянный.

Если две поверхности пересекаются под постоянным углом и если кривая пересечения будет линией кривизны для одной поверхности, то кривая пересечения будет линией кривизны и для другой поверхности.

Действительно, так как угол φ постоянный, то

$$\frac{d\sin\varphi}{ds}=\left(\frac{d\bar{\beta}_1}{ds}\cdot\{\bar{\beta}\cdot\bar{\sigma}\}\right)+\left(\bar{\beta}_1\cdot\left\{\frac{d\bar{\beta}}{ds}\cdot\bar{\sigma}\right\}\right)+\left(\bar{\beta}_1\cdot\left\{\bar{\beta}\cdot\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\right\}\right)=0.$$

Как видели

$$\left(\bar{\beta}_1\cdot\left\{\bar{\beta}\cdot\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\right\}\right)=0.$$

Так как кривая пересечения будет линией кривизны для одной поверхности, то

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}=-\frac{1}{R_1}\bar{\sigma}$$

и следовательно,

$$\left(\bar{\beta}_1\cdot\left\{\frac{d\bar{\beta}}{ds}\cdot\bar{\sigma}\right\}\right)=0.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{d\bar{\beta}_1}{ds}\cdot\{\bar{\beta}\cdot\bar{\sigma}\}\right)=0$$

и вектор $\frac{d\bar{\beta}_1}{ds}$ будет следовательно перпендикулярен к вектору $\{\bar{\beta}\cdot\bar{\sigma}\}$.

Так как $(\bar{\beta}_1\cdot\bar{\beta}_1)=1$, то

$$\left(\frac{d\bar{\beta}_1}{ds}\cdot\bar{\beta}_1\right)=0$$

и вектор $\frac{d\bar{\beta}_1}{ds}$ будет перпендикулярен к вектору $\bar{\beta}_1$.

Вектор $\{\bar{\beta}\cdot\bar{\sigma}\}$ очевидно расположен в нормальной плоскости к кривой пересечения.

Таким образом, вектор $\frac{d\bar{\beta}_1}{ds}$, перпендикулярен к векторам $\{\bar{\beta}\cdot\bar{\sigma}\}$ и $\bar{\beta}_1$ будет перпендикулярен к нормальной плоскости и следовательно, паралели орту $\bar{\sigma}$, т. е.

$$\frac{d\bar{\beta}_1}{ds}=m\bar{\sigma}$$

и

$$\left(\frac{dp_1}{ds}\cdot\{\bar{\beta}_1\cdot\bar{\sigma}\}\right)=m(\bar{\sigma}\cdot\{\bar{\beta}_1\cdot\bar{\sigma}\})=0.$$

23. Если начало координат перенесено в точку M поверхности и ось z-ов направлена по нормали к поверхности, оси x-ов и y-ов расположены в касательной плоскости, то градиент поверхности будет равен орту $\bar{\beta} = i_3$, так как

$$P = 0,\ \theta = 0,\ p = 1.$$

Формулу (33) можно переписать в виде

$$\frac{1}{R} = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + E\sin^2\alpha,$$

где α — угол между плоскостью нормального сечения и плоскостью XMZ, так как

$$u_1 = \frac{dx_1}{ds} = \cos\alpha, \quad u_2 = \frac{dy_1}{ds} = \sin\alpha$$

Касательный орт $\bar{\sigma}$ к данному нормальному сечению будет равен

$$\bar{\sigma} = \cos\alpha i_1 + \sin\alpha i_2.$$

Так как

$$\frac{d\bar{p}}{ds} = -\frac{dP}{ds}i_1 - \frac{d\theta}{ds}i_2 = -[A\cos\alpha + B\sin\alpha]\,i_1 - [B\cos\alpha + E\sin\alpha]\,i_2,$$

то следовательно

$$\left\{\bar{p}\cdot\frac{d\bar{p}}{ds}\right\} = \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & i_3 \\ 0, & 0, & 1 \\ -\frac{dP}{ds}, & -\frac{d\theta}{ds}, & 0 \end{vmatrix} = \frac{d\theta}{ds}i_1 - \frac{dP}{ds}i_2 =$$

$$= [B\cos\alpha + E\sin\alpha]\,i_1 - [A\cos\alpha + B\sin\alpha]\,i_2$$

и

$$\left(\bar{\sigma}\cdot\left\{\bar{p}\cdot\frac{d\bar{p}}{ds}\right\}\right) = (E - A)\cos\alpha\sin\alpha + B(\cos^2 a - \sin^2\alpha).$$

Так как

$$\frac{d\bar{p}}{ds} = p\frac{d\bar{\beta}}{ds} + \frac{dp}{ds}\bar{\beta}$$

и в точке M

$$Mp = 1,\ \bar{p} = \bar{\beta} = i_3,$$

то следовательно

$$\left(\bar{\sigma}\cdot\left\{\bar{\beta}\cdot\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right\}\right)=(E-A)\cos\alpha\sin\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$$

Дифференцируя $\frac{1}{R}$ по α, имеем, что

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{R}=2(E-A)\cos\alpha\sin\alpha+2B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

Таким образом, если s длина дуги данного нормального сечения, то произведение

$$\left(\bar{\sigma}\cdot\left\{\bar{\beta}\cdot\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right\}\right)$$

равняется половине производной по α от кривизны данного нормального сечения.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ „ВЕРШИНЫ" ВОЛЧКА. I

Ю. А. КРУТКОВА

(*Представлено академиком* **А. Н. Крыловым**)

§ 1. **Введение.** В продолжении нескольких лет я пользуюсь при изложении гиростатических задач динамики следующей формой дифференциальных уравнений движения волчка:

$$A\dot{\mathfrak{v}} = -\mathfrak{r} \times \mathfrak{M} + Cn\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} - A\mathfrak{v}^2 \mathfrak{r} \tag{I}$$

$$C\dot{n} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{r}, \tag{II}$$

где A и C моменты инерции экваториальный и аксиальный, $\mathfrak{M}$ момент сил, $\mathfrak{r}$ единичный вектор по оси волчка из неподвижной точки O или центра инерции G, отложенный в ту или другую сторону, $\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}}$ скорость конца P вектора $\mathfrak{r}$ — «вершины» волчка; n собственная угловая скорость волчка. Уравнение (I) благодаря члену $\mathfrak{D} = Cn\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}$ — «отклоняющей силе» — отличающему его от уравнения движения точки, остающейся на шаре радиуса единица, весьма наглядно. Если точка O не неподвижна, а имеет ускорение $\ddot{\mathfrak{a}}$, то $\mathfrak{M}$ в (I) нужно заменить на $\mathfrak{M} - ml\mathfrak{r} \times \ddot{\mathfrak{a}}$, где m масса волчка и l расстояние OG. Тогда вместо (I) получим

$$A\dot{\mathfrak{v}} = -\mathfrak{r} \times \mathfrak{M} - ml\ddot{\mathfrak{a}}_q + Cn\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} - A\mathfrak{v}^2 \mathfrak{r}, \tag{I$_1$}$$

где

$$\ddot{\mathfrak{a}}_q = \ddot{\mathfrak{a}} - (\ddot{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{r})\mathfrak{r}; \tag{1}$$

уравнение (II) останется прежним.*

* Уравнению (I) можно дать название уравнения A. Föppl'я, см. Zschr. f. Math. u. Phys. 48 (1903) p. 272 и Vorles. ü. techn. Mech. 3 Aufl. IV p. 234. Вывод Föppl'я предполагает однако, что $n = \text{const.}$ и, чтобы стать строгим, требует незначительного дополнения.

В (I) следует обратить внимание на то, что $\dot{\mathfrak{v}}$ абсолютное ускорение вершины, так что для системы координат с *произвольной* угловой скоростью $\mathfrak{u}_1$, имеем

$$\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{v}, \tag{2}$$

где $\mathfrak{v}'$ относительная производная. Таким образом (I) обладает полной общностью. Осенью этого года я имел случай в лекциях, прочитанных совместно с академиком А. Н. Крыловым группе слушателей Академии Военно-Воздушного флота изложить ряд задач гиростатики, исходя из (I) и (II). Несколько вопросов, как имеющих менее непосредственный интерес или менее элементарных, не нашли там своего места, они составляют содержание этой статьи, которая есть дополнение к части второй книги А. Н. Крылова и моей, содержащей эти лекции.*

§ 2. **Theoria motus § 1019 и уравнения (I_1) и (II).** В §§ 1012 и сл. Theoriae motus** Эйлер выводит шесть уравнений движения твердого тела, в коих зависимыми переменными являются координаты произвольной точки тела относительно неподвижной системы координат и направляющие косинусы осей системы координат, неизменно связанной с телом. Получаются уравнения такой большой сложности, что Эйлер терпит неудачу уже при рассмотрении простейшего случая — движения по инерции. Пользуясь векторным исчислением не представляет труда получить эти уравнения Эйлера в компактном виде и из них для случая оси (кинетической) симметрии уравнения, эквивалентные нашей системе.

Пусть $\mathfrak{R}$ координатный вектор произвольной точки тела, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}_1$ главный вектор и главный момент (относительно начала неподвижной системы координат) сил, к телу приложенных.

Имеем

$$\Sigma m\ddot{\mathfrak{R}} = \mathfrak{F}, \quad \Sigma m\mathfrak{R} \times \ddot{\mathfrak{R}} = \mathfrak{M}_1. \tag{I}$$

Если $\mathfrak{a}$ координатный вектор начала координат, связанных с телом, и $\mathfrak{r}$ координатный вектор точки тела относительно последней системы координат, то

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}\Pi, \quad \ddot{\mathfrak{R}} = \ddot{\mathfrak{a}} + \mathfrak{r}\ddot{\Pi}, \tag{2}$$

* «Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений».

** Цитирую по переводу Wolfers'а: Euler's Theorie d. Bewegung fester oder starrer. Körper. Greifswald, 1853, pp. 581—595.

где Π тензор преобразования:

$$\Pi = \begin{Vmatrix} \cos(\xi, x) & \cos(\eta, x) & \cos(\zeta, x) \\ \cos(\xi, y) & \cos(\eta, y) & \cos(\zeta, y) \\ \text{coc}(\xi, z) & \cos(\eta, z) & \cos(\zeta, z) \end{Vmatrix} \tag{3}$$

(ξ, η, ζ — оси неподвижные, x, y, z — оси, неизменно связанные с телом). Итак имеем:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \ddot{\mathfrak{a}}\Sigma m + (\Sigma m\mathfrak{r})\ddot{\Pi} \\ \mathfrak{M}_1 &= \mathfrak{a} \times \ddot{\mathfrak{a}}\Sigma m + \mathfrak{a} \times \Sigma m\mathfrak{r}\ddot{\Pi} + \Sigma m\mathfrak{r}\Pi \times \ddot{\mathfrak{a}} + \Sigma m\mathfrak{r}\Pi \times \mathfrak{r}\ddot{\Pi} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\mathfrak{M}_1 = \Sigma\mathfrak{R} \times \mathfrak{f} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{F} + \Sigma\mathfrak{r}\Pi \times \mathfrak{f} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{F} + \mathfrak{M}, \tag{5}$$

где $\mathfrak{f}$ силы, приложенные к точкам тела, и $\mathfrak{M}$ главный момент относительно начала осей, связанных с телом. Поэтому, пользуясь первым уравнением (4) второе можно переписать так:

$$\Sigma m\mathfrak{r}\Pi \times \ddot{\mathfrak{a}} + \Sigma m\mathfrak{r}\Pi \times \mathfrak{r}\ddot{\Pi} = \mathfrak{M} \tag{6}$$

Второй член здесь имеет составляющие

$$\sum_{i,k} (a_{i\alpha}\ddot{a}_{k\beta} - a_{i\beta}\ddot{a}_{k\alpha}) \sum m x_i x_k, \tag{7}$$

где a_{ik} косинус таблицы (3), стоящий на пересечении i-той строки и k-того столбца, суммирование по i и k идет от 1 до 3 и α, β нужно давать значения $\alpha = 2$, $\beta = 3$; $\alpha = 3$, $\beta = 1$; $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Вводя обозначения

$$\Theta_{ik} = \Theta_{ki} = \Sigma m x_i x_k \tag{8}$$

и

$$\mathfrak{e}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), \tag{9}$$

получаем для второго члена

$$\sum_{i,k} (\mathfrak{e}_i \times \ddot{\mathfrak{e}}_k)\Theta_{ik}. \tag{10}$$

$\mathfrak{e}_i$, очевидно, единичные вектора по осям x_i (т. е. x, y, z), Θ_{ik} просто связаны с моментами и произведениями инерции. Таким образом вместо (6) можем написать

$$\sum_{i,k} (\mathfrak{e}_i \times \ddot{\mathfrak{e}}_k)\,\Theta_{ik} = \mathfrak{M} - \Sigma m\mathfrak{r}\Pi \times \ddot{\mathfrak{a}}. \tag{11}$$

Если оси x_i главные оси, то $\Theta_{ik} = 0$ для $i \neq k$ и двойная сумма превращается в простую

$$\sum_i (\mathfrak{e}_i \times \ddot{\mathfrak{e}}_i)\,\Theta_{ii} \tag{12}$$

Положим теперь, что тело обладает осью кинетической симметрии:

$$A = B \neq C, \quad A = \Sigma m (x_2^2 + x_3^2), \quad B = \Sigma m (x_3^2 + x_1^2), \quad C = \Sigma m (x_1^2 + x_2^2); \tag{13}$$

тогда, как легко видеть

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \frac{C}{2}, \quad \Theta_{33} = A - \frac{C}{2} \tag{14}$$

и

$$\sum_i (\mathfrak{e}_i \times \ddot{\mathfrak{e}}_i)\,\Theta_{ii} = \frac{C}{2}(\mathfrak{e}_1 \times \ddot{\mathfrak{e}}_1 + \mathfrak{e}_2 \times \ddot{\mathfrak{e}}_2 - \mathfrak{e}_3 \times \ddot{\mathfrak{e}}_3) + A\mathfrak{e}_3 \times \ddot{\mathfrak{e}}_3. \tag{15}$$

Согласно основной формуле кинематики твердого тела:

$$\dot{\mathfrak{e}}_i = \mathfrak{u} \times \mathfrak{e}_i,$$

где $\mathfrak{u}$ угловая скорость. Поэтому

$$\mathfrak{e}_i \times \ddot{\mathfrak{e}}_i = \frac{d}{dt}(\mathfrak{e}_i \times \dot{\mathfrak{e}}_i) = \frac{d}{dt}\mathfrak{e}_i \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{e}_i) = \frac{d}{dt}[\mathfrak{u} - \mathfrak{e}_i(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{e}_i)]$$

и мы получаем

$$\sum_i (\mathfrak{e}_i \times \ddot{\mathfrak{e}}_i)\,\Theta_{ii} = C\frac{d}{dt}[\mathfrak{e}_3(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{e}_3)] + A\mathfrak{e}_3 \times \ddot{\mathfrak{e}}_3. \tag{16}$$

Вводим обозначения

$$\mathfrak{e}_3 = \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{e}_3 = n, \quad \dot{\mathfrak{e}}_3 = \mathfrak{v},$$

тогда получаем:

$$A\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{v}}+\frac{d}{dt}Cn\mathfrak{r}=\mathfrak{m},$$

где через $\mathfrak{m}$ обозначена правая часть (11); стоящая там сумма, очевидно, дает умноженный на массу координатный вектор центра инерции. Если он лежит на оси симметрии, то вместо суммы можем написать $ml\mathfrak{r}$, где m масса тела:

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{M}-ml\mathfrak{r}\times\ddot{\mathfrak{a}}. \tag{17}$$

Окончательно имеем

$$A\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{v}}+C\dot{n}\mathfrak{r}+Cn\mathfrak{v}=\mathfrak{M}-ml\mathfrak{r}\times\ddot{\mathfrak{a}}. \tag{18}$$

Чтобы отсюда получить (I_1) и (II) множим (18) на $-\mathfrak{r}\times$ и на $\mathfrak{r}\cdot$ и получаем:

$$\left.\begin{aligned}A[-\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\cdot\dot{\mathfrak{v}})+\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}^2]-Cn\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}&=-\mathfrak{r}\times\mathfrak{M}+ml[\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\cdot\ddot{\mathfrak{a}})-\ddot{\mathfrak{a}}\mathfrak{r}^2]\\ C\dot{n}+Cn\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v}&=\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{r}.\end{aligned}\right\}$$

Но $\mathfrak{r}^2=1$, откуда

$$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v}=0,\quad \mathfrak{r}\cdot\dot{\mathfrak{v}}+\mathfrak{v}^2=0, \tag{19}$$

следовательно имеем

$$\left.\begin{aligned}A\dot{\mathfrak{v}}&=-\mathfrak{r}\times\mathfrak{M}-ml[\ddot{\mathfrak{a}}-\mathfrak{r}(\ddot{\mathfrak{a}}\cdot\mathfrak{r})]+Cn\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}-A\mathfrak{v}^2\mathfrak{r},\\ C\dot{n}&=\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{r},\end{aligned}\right\}$$

а это наши уравнения (I_1) и (II), если еще заметить, что

$$\ddot{\mathfrak{a}}-(\ddot{\mathfrak{a}}\cdot\mathfrak{r})\mathfrak{r}=\ddot{\mathfrak{a}}_q.^*$$

* Уравнение (11) можно преобразовать к тензорному виду

$$\Theta\ddot{\Pi}\bar{\Pi}-\Pi\ddot{\bar{\Pi}}\Theta=\mathrm{M},\ (*)$$

где $\bar{\Pi}$ транспонированный тензор Π и M антисимметричный тензор, сопоставленный вектору $\mathfrak{m}$ по правилу

$$M_{ii}=0,\quad M_{23}=-M_{32}=m_1,\quad M_{31}=-M_{13}=m_2,\quad M_{12}=-M_{21}=m_3.$$

Форма (*) интереса не представляет. См. впрочем, J. A. Schouten, Vektor-u. Affinor-analysis. Lpz. Teubner, 1914, p. 221.

§ 3. **Получение уравнений из начала Гамильтона.** Чтобы лучше уяснить себе связь между нашими уравнениями в виде (I_1), (II) и (18), получим их из начала стационарного действия Гамильтона.

Пусть $\mathfrak{u}$ — угловая скорость тела, $\mathfrak{d}$ — соответствующий ей вектор для возможного перемещения, $\mathfrak{R}$ — координатный вектор произвольной точки тела;* тогда

$$\dot{\mathfrak{R}} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{R}, \quad \delta\mathfrak{R} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{R} \tag{1}$$

и отсюда

$$\delta\dot{\mathfrak{R}} = \delta\mathfrak{u} \times \mathfrak{R} + \mathfrak{u} \times (\mathfrak{d} \times \mathfrak{R})$$

или, полагая

$$\delta\mathfrak{u} = \Delta\mathfrak{u} + \mathfrak{d} \times \mathfrak{u}, \tag{2}$$

$$\delta\dot{\mathfrak{R}} = \Delta\mathfrak{u} \times \mathfrak{R} + (\mathfrak{d} \times \mathfrak{u}) \times \mathfrak{R} + \mathfrak{u} \times (\mathfrak{d} \times \mathfrak{R}), \tag{3}$$

где $\Delta\mathfrak{u}$ отнесено к координатам, связанным с телом, имея составляющими δp, δq, δr. С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\delta\mathfrak{R} = \dot{\mathfrak{d}} \times \mathfrak{R} + \mathfrak{d} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{R}). \tag{4}$$

Вычитая из (3) (4) получаем:

$$0 = (\Delta\mathfrak{u} - \dot{\mathfrak{d}}) \times \mathfrak{R} + \mathfrak{R} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{d}) + \mathfrak{u} \times (\mathfrak{d} \times \mathfrak{R}) - \mathfrak{d} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{R})$$

или, так как три последних члена дают совместно нуль,

$$(\Delta\mathfrak{u} - \dot{\mathfrak{d}}) \times \mathfrak{R} = 0, \tag{5}$$

что в виду произвольности $\mathfrak{R}$ дает

$$\Delta\mathfrak{u} = \dot{\mathfrak{d}}. \tag{6}$$

В применении к координатному вектору вершины волчка $\mathfrak{r}$ имеем

$$\delta\mathfrak{r} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{r}, \tag{7}$$

откуда, умножая спереди векторно на $\mathfrak{r}$:

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{r} \times \delta\mathfrak{r} + (\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{r})\,\mathfrak{r}. \tag{8}$$

* См. Kirchhoff. Mechanik, 5 u. 6. Vorlesung.

Также имеем:

$$\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{v} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r} \tag{9}$$

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{v} + (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r})\,\mathfrak{r}. \tag{10}$$

Начало Гамильтона для нашего случая имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \{\delta T + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{b} + \lambda \mathfrak{r} \cdot \delta \mathfrak{r}\} = 0, \tag{11}$$

где последний член произошел от связи $\mathfrak{r}^2 = 1$, т. е. условия $\mathfrak{r} \cdot \delta\mathfrak{r} = 0$.

За T берем выражение

$$T = \frac{1}{2} A\mathfrak{v}^2 + \frac{1}{2} Cn^2, \tag{12}$$

где $n = \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r}$. Имеем:

$$\delta T = A\mathfrak{v} \cdot \delta\mathfrak{v} + Cn\,\Delta n = A\frac{d}{dt}(\mathfrak{v} \cdot \delta\mathfrak{r}) - A\dot{\mathfrak{v}} \cdot \delta\mathfrak{r} + Cn\,\Delta n;$$

во втором члене мы написали Δn, ибо здесь, очевидно,

$$\Delta n = \Delta\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r} = \dot{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{r}; \tag{13}$$

второй член можно переписать так:

$$Cn\,\Delta n = Cn\dot{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{r} = \frac{d}{dt}(Cn\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{b}) - C\dot{n}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{b} - Cn\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}.$$

Итак

$$\delta T = \text{полная производная} - A\dot{\mathfrak{v}} \cdot \delta\mathfrak{r} - C\dot{n}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{b} - Cn\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}. \tag{14}$$

Мы имеем две возможности: (a) при помощи (7) исключить отсюда $\delta\mathfrak{r}$; (b) выразить $\mathfrak{b}$ через $\delta\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{r}$ при помощи (8)

(a) дает:

$$\delta T = \text{п. пр.} - A(\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{v}}) \cdot \mathfrak{b} - C\dot{n}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{b} - Cn\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{b}, \tag{15}$$

член $\lambda\mathfrak{r} \cdot \delta\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{r})$ даст нуль, так как он равен $\lambda(\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}) \cdot \mathfrak{b}$. Поэтому получим:

$$A\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{v}} + C\dot{n}\mathfrak{r} + Cn\mathfrak{v} = \mathfrak{m}, \tag{16}$$

т. е. уравнение (18) § 2.

($\mathfrak{b}$) дает:

$$\delta T = \text{п. пр.} - A\dot{\mathfrak{v}}\cdot\delta\mathfrak{r} + (C\dot{n}\mathfrak{v} + Cn\mathfrak{v})\cdot[\mathfrak{r}\times\delta\mathfrak{r} + (\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{r})\,\mathfrak{r}]$$

или с точностью до полной производной:

$$\delta T = -(A\dot{\mathfrak{v}} - Cn\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})\cdot\delta\mathfrak{r} - C\dot{n}(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{r}), \tag{17}$$

ибо $\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} = 0$. Далее:

$$\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{d} = \mathfrak{m}\cdot(\mathfrak{r}\times\delta\mathfrak{r} + (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{d})\,\mathfrak{r}) = -(\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{m}})\cdot\delta\mathfrak{r} + (\dot{\mathfrak{m}}\cdot\mathfrak{r})\,(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{r}). \tag{18}$$

Окончательно имеем, приравнивая нулю коэффициенты при $\delta\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{r}$:

$$\left.\begin{aligned} A\dot{\mathfrak{v}} &= -\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{m}} + Cn\mathfrak{r}\times\mathfrak{v} + \lambda\mathfrak{r} \\ C\dot{n} &= \dot{\mathfrak{m}}\cdot\mathfrak{r} \end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

Вместо $\dot{\mathfrak{m}}\cdot\mathfrak{r}$ можем (см. 17 § 2) написать $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{r}$. Чтобы определить λ множим первое уравнение скаларно на $\mathfrak{r}$:

$$A\mathfrak{r}\cdot\dot{\mathfrak{v}} = \lambda,$$

но $\mathfrak{r}\cdot\dot{\mathfrak{v}} = -\mathfrak{v}^2$, следовательно

$$\lambda = -A\mathfrak{v}^2$$

и мы для случая ($\mathfrak{b}$) имеем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} A\dot{\mathfrak{v}} &= -\mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{m}} + Cn\mathfrak{r}\times\mathfrak{v} - A\mathfrak{v}^2\,\mathfrak{r} \\ C\dot{n} &= \mathfrak{M}\cdot\mathfrak{r} \end{aligned}\right\}, \tag{20}$$

т. е. наши уравнения (I_1) и (II).

Если бы мы взяли, согласно (10), T в виде

$$\frac{1}{2}A(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})^2 + \frac{1}{2}Cn^2,$$

то не получили бы ничего нового. Это можно и предвидеть, так как $(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})^2 = \mathfrak{v}^2$ в силу $\mathfrak{r}^2 = 1$, $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v} = 0$.

§ 4. Функция Лангранжа для случая $n = \text{const}$. Как ясно видно из вывода уравнений при помощи начала Гамильтона, уравнения эти не-Лагранжевы:

$\mathfrak{r}$ — настоящая координата (связанная условием $\mathfrak{r}^2=1$), но n — квази-скорость. Для случая, важного для всех почти применений,

$$n = n_0 = \text{const}. \tag{1}$$

можно придать уравнению (I) Лагранжев вид.

Начнем с членов, содержащих A:

$$A(\dot{\mathfrak{v}} + \mathfrak{v}^2 \mathfrak{r}).$$

Их можно получить из Лагранжевой функции

$$L_1 = \frac{1}{2}\frac{A}{\mathfrak{r}^2}\mathfrak{v}^2, \tag{2}$$

причем после составления уравнения Лагранжа нужно положить

$$r = |\mathfrak{r}| = 1, \quad \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v} = 0. \tag{3}$$

Действительно:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mathfrak{v}} = \frac{A}{\mathfrak{r}^2}\mathfrak{v}$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \mathfrak{v}} = \frac{A}{\mathfrak{r}^2}\dot{\mathfrak{v}} - \frac{2A}{r^3}\frac{\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v}}{r}\mathfrak{v}.$$

Далее:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mathfrak{r}} = -\frac{A\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{r}^3}\frac{\mathfrak{r}}{r},$$

откуда

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \mathfrak{v}} - \frac{\partial L_1}{\partial \mathfrak{r}}\right]_{\mathfrak{r}^2=1} = A(\dot{\mathfrak{v}} + \mathfrak{v}^2 \mathfrak{r}). \tag{4}$$

Переходим к члену $-Cn_0 \mathfrak{r}\times\dot{\mathfrak{v}}$. Полагаем

$$L_2 = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{v}, \tag{5}$$

где вектор $\mathfrak{A}$ функция от $\mathfrak{r}$. Тогда имеем

$$\frac{\partial L_2}{\partial \mathfrak{v}} = \mathfrak{A}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \mathfrak{v}} = \dot{\mathfrak{A}}$$

и

$$\dot{A}_x = \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}, \text{ etc.}$$

Вычисляем $\frac{\partial L_2}{\partial \mathfrak{r}}$:

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}, \text{ etc.}$$

Следовательно

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}} - \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\right) L_2 = \operatorname{rot}\mathfrak{A} \times \mathfrak{v} \tag{6}$$

и должно быть

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = -Cn_0\,\mathfrak{r}.$$

что в силу $\operatorname{div}\mathfrak{r} \neq 0$ невозможно. Заменяя, однако $-Cn_0\,\mathfrak{r}$ на $-\frac{Cn_0}{r_3}\mathfrak{r}$ сводим дело к задаче: найти вектор-потенциал для полюса $\mu = -Cn_0$, который, как хорошо известно, равен

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}}{r(r + \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a})}, \tag{7}$$

где $\mathfrak{a}$ единичный вектор произвольного направления, например (0, 0, 1).

Таким образом

$$L_2 = -Cn_0\frac{\mathfrak{v} \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r})}{r(r + \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a})}, \tag{8}$$

т. е.

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \mathfrak{v}} - \frac{\partial L_2}{\partial \mathfrak{r}}\right]_{\mathfrak{r}^2=1} = -Cn_0\,\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}. \tag{9}$$

Полная функция Лагранжа

$$L = L_1 + L_2 = \frac{1}{2}\frac{A}{\mathfrak{r}^2}\mathfrak{v}^2 - Cn_0\frac{\mathfrak{v} \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{r})}{r(\mathfrak{r} + \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a})} \tag{10}$$

дает таким образом (для $\mathfrak{r}^2 = 1$, $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{v} = 0$) члены,

$$A\dot{\mathfrak{v}} + A\mathfrak{v}^2\mathfrak{r} - Cn_0\,\mathfrak{r} \times \mathfrak{v},$$

и уравнение (I) можно написать так:

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{r}}\right] = -\mathfrak{r} \times \mathfrak{M}. \tag{11}$$

Заметим еще, что выражение (8) для L_2 можно и изменить, так как прибавление градиента к $\mathfrak{A}$ не повлияет на rot $\mathfrak{A}$. В силу этого полное L совпадает с тем L, которое получается после игнорации угла φ, т. е. того Эйлерова угла, которому соответствует момент Cn_0.

Действительно, дополнительный линейный в скорости член, который появляется в Лагранжевой функции после игнорации φ равен

$$Cn_0 \dot{\psi} \cos \vartheta.*$$

С другой стороны, положив

$$x = r \sin \psi \sin \vartheta, \quad y = -r \cos \psi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta,$$

легко получаем:

$$L_2 = -Cn_0 \frac{\sin^2 \vartheta \dot{\psi}}{1 + \cos \vartheta}$$

или

$$L_2 = -Cn_0 \dot{\psi} + Cn_0 \dot{\psi} \cos \vartheta, \tag{12}$$

первый член ничего не дает в уравнения движения, легко показать, что это градиент; второй совпадает с выше написанным.

Для n переменного наши уравнения становятся существенным образом неголономными.

§ 5. **Уравнение (I_1) и Intrinsic equations Lamb'a.**** Уравнение (I_1) в любой вращающейся системе координат имеет вид

$$A(\mathfrak{v}' + \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{v}) = -\mathfrak{r} \times \mathfrak{m} + Cn\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} - A\mathfrak{v}^2 \mathfrak{r}, \tag{1}$$

где штрих обозначает относительную производную по времени. Среди таких вращающихся систем координат выделяется класс, для коего угловая скорость

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{r} \times \mathfrak{v} + n_1 \mathfrak{r} \tag{2}$$

с n_1 не равным n или равным. В последнем случае система координат неизменно связана с твердым телом и можно показать, что (1) совпадает, если направление $\mathfrak{r}$ взять за ось z-ов, с первыми двумя уравнениями Эйлера. Во всех случаях (2) вектор $\mathfrak{r}$ в системе координат (2) *постоянный* вектор.

* См. напр., Webster. Dynamics, p. 278, форм. (85).

** H. Lamb, Proc. Roy. Soc. Edin. 35 (1915), p. 153 и Higher Mechanics, p. 132.

Рассмотрим, как пример, уравнения Lamb'а. Здесь за оси координат взяты: (1) ось симметрии волчка $\mathfrak{r}$; (2) направление скорости вершины $\mathfrak{v}$; (3) третье направление, дополняющее систему координат, например, направление вектора $\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}$. $\mathfrak{u}_1$ этой системы координат, очевидно, принадлежит к классу (2). Для левой части (1) имеем:

$$A[\mathfrak{v}'+(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})\times\mathfrak{v}+n_1\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}]=A[\mathfrak{v}'-\mathfrak{v}^2\mathfrak{r}+n_1\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}]$$

следовательно

$$A\mathfrak{v}'=-\mathfrak{r}\times\mathfrak{m}+(Cn-An_1)\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}. \tag{3}$$

Для направления $\mathfrak{v}$ имеем, так как $\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}\perp\mathfrak{v}$:

$$A\frac{dv}{dt}=P, \tag{4}$$

где P проекция вектора $-\mathfrak{r}\times\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{v}$. Для направления $\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}$:

$$An_1 v=Q+Cnv, \tag{5}$$

так как $|\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}|$ в силу $\mathfrak{r}^2=1$, $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v}=0$ равно v; здесь Q проэкция $-\mathfrak{r}\times\mathfrak{m}$ на направление $\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}$. Полагая $n_1=\chi$ получим уравнения Lamb'а.

§ 6. **Обобщение уравнений А. Н. Крылова для вращательного движения продолговатого снаряда.*** Уравнения эти получены в предположении, что некоторый участок траектории центра инерции снаряда можно принять за плоский. Избавимся от этого ограничения и покажем, что и для общего случая форма уравнений остается прежней, если ввести координатную систему: касательная $\mathfrak{t}$, главная нормаль $\mathfrak{n}$, бинормаль $\mathfrak{b}$, движущуюся с центром инерции. Угловая скорость вращения этой системы координат, как известно, равна

$$\mathfrak{q}=\frac{V}{\rho}\mathfrak{b}-\frac{V}{\tau}\mathfrak{t}=\mathfrak{q}_2+\mathfrak{q}_3, \tag{1}$$

где V скорость центра инерции, $\frac{1}{\rho}$ и $\frac{1}{\tau}$ кривизна и кручение его траектории.** В случае акад. А. Н. Крылова $\mathfrak{q}$ сводится к одному $\mathfrak{q}_2$. Покажем, что и в общем случае $\mathfrak{q}_3$ в уравнения движения не войдет.

* Акад. А. Н. Крылов, Изв. Физ.-Мат. инст., III (1928); О вращательном движении и т. д Л. 1929, p. 209 и сл.

** См., напр., Heun, Kinematik, p. 239.

Полагаем, что ось снаряда следит хорошо за касательной и потому

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{t} + \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R} \perp \cdot, \tag{2}$$

где $\mathfrak{R}$ — малое. Из моментов сил принимаем во внимание только «опрокидывающую пару»

$$\mathfrak{M} = -K\mathfrak{r} \times \mathfrak{t}, \tag{3}$$

где K функция от скорости центра инерции, формы и калибра снаряда, плотности воздуха. Отсюда

$$-\mathfrak{r} \times \mathfrak{M} = K[(\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{t})\mathfrak{r} - \mathfrak{t}] = K\mathfrak{R}. \tag{4}$$

Пользуясь теоремой Кориолиса имеем

$$\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{r}'' + \mathfrak{q}' \times \mathfrak{r} + 2\mathfrak{q} \times \mathfrak{r}' + \mathfrak{q} \times (\mathfrak{q} \times \mathfrak{r}),$$

где штрихи обозначают относительные производные. Полагая малыми не только $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}''$, но и $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$, получаем

$$\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{R}'' + \mathfrak{q}' \times \mathfrak{f}.$$

Далее:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{R}' + \mathfrak{q} \times \mathfrak{t}$$

и

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} = \mathfrak{t} \times \mathfrak{R}' + \mathfrak{t} \times (\mathfrak{q} \times \mathfrak{t}) = \mathfrak{t} \times \mathfrak{R}' + \mathfrak{q} - \mathfrak{t}(\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{t}).$$

Отсюда уравнение (I) напишется так:

$$A(\mathfrak{R}'' + \mathfrak{q}' \times \mathfrak{t}) = K\mathfrak{R} + Cn[\mathfrak{t} \times \mathfrak{R}' + \mathfrak{q} - (\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{t})\mathfrak{t}], \tag{5}$$

ибо член $-A\mathfrak{v}^2\mathfrak{r}$ второго порядка малости. Уравнение (II)

$$C\dot{n} = 0$$

дает

$$n = n_0 = \text{const.} \tag{7}$$

В уравнение (5) входит только $\mathfrak{q}_2$. Действительно справа стоит

$$\mathfrak{q} - (\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{t})\mathfrak{t} = \mathfrak{q} - \mathfrak{q}_3 = \mathfrak{q}_2,$$

а слева

$$\mathfrak{y}' \times \mathfrak{t} = \mathfrak{q}_2' \times \mathfrak{t}.$$

Уравнение (5), если написать его в составляющих, совпадает с уравнениями А. Н. Крылова; таким образом наше утверждение доказано.

На тело, не обладающее осью кинетической симметрии, т. е. на тело с тремя различными главными моментами инерции, вид (I), (II) уравнений движения, годный для $A = B \neq C$, не может быть просто обобщен. Форме уравнений, аналогичной (I), (II), и некоторым их применениям будет посвящена следующая моя статья.

Физико-Математический институт
Декабрь 1931.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ДЕЙСТВИИ ОДНОЦИЛИНДРОВОЙ ПАРОВОЙ МАШИНЫ

Д. А. ГРАВЕ

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

1. В довольно распространенной книге инженера Хорта под заглавием: «Die Differentialgleichungen des Ingenieurs». Berlin. 1925 находится глава: «Anwendung der Rungeschen Methode auf die Untersuchung des Bewegungsverlaufes einer Einzylinger-Dampfmaschine» (S. 253 — 266).

Здесь автор по обыкновению рассматривает живую силу машины

$$L = \frac{1}{2}\varepsilon(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon(\theta) = \Theta + (M + M_1) r^2 \sin^2\theta \left(1 + \frac{r}{l}\frac{\cos\theta}{\cos\beta}\right)^2 -$$

$$- 2\,\mathfrak{M}_1 \frac{r^3}{l^2}\sin^2\theta\left(1 + \frac{r}{l}\frac{\cos\theta}{\cos\beta}\right)\frac{\cos\theta}{\cos\beta} + \Theta_1 \frac{r^2}{l^2}\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\beta}.$$

Здесь Θ общий момент инерции всех вращающихся частей, M массы частей соединенных в крейцкопфе, M_1 масса шатуна, $\mathfrak{M}_1$ статический момент шатуна по отношению к крейцкопфу, Θ_1 момент инерции шатуна также по отношению к крейцкопфу, r длина кривошипа, l длина шатуна, β угол между шатуном и направлением поршня, а θ угол кривошипа с направлением поршня.

Очевидно, должно быть

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\theta.$$

Уравнение движения машины напишется, если применить к живой силе (1) уравнение Лагранжа второго рода. Получаем

$$(2) \qquad \varepsilon(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{1}{2}\varepsilon'(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=F(\theta),$$

где

$$(3) \qquad F(\theta)=r(T-W).$$

Здесь rT есть касательный момент силы кривошипа, а rW — касательный момент полезного сопротивления, которое машина должна превозмочь и которое Хорт считает постоянным.

2. Для того чтобы применить при рассмотрении конкретного случая машины методу Рунге приближенного интегрирования, автор рассуждает так. Он заменяет уравнение (2) системой уравнений первого порядка

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{2F(\theta)-\varepsilon'(\theta)\omega^2}{2\varepsilon(\theta)}, \quad \frac{d\theta}{dt}=\omega,$$

где ω — угловая скорость главного вала, которую автор и желает выразить как функцию от θ.

Разделяя первое уравнение на второе, автор пишет

$$(4) \qquad \frac{d\omega}{d\theta}=\frac{2F(\theta)-\varepsilon'(\theta)\omega^2}{2\omega\varepsilon(\theta)}.$$

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\omega}.$$

Далее мы читаем: «Wir haben also ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen, auf die Runge sein Verfahren besonders zugeschnitten hat. Bei Runge lauten die Gleichungen

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dx}=g(x, y, z)»$$

и т. д.

Все было бы совершенно хорошо, если бы уравнение (4) не интегрировалось в квадратурах. Производя это интегрирование, мы приходим к знаменитому интегралу живых сил

$$(5) \qquad \varepsilon(\theta)\omega^2=C+2\int F(\theta)\,d\theta,$$

который рассматривается в теории машин еще со времени Лагранжа и Пуассона.

Очевидно, совет Рунге был непрактичный, так как из уравнения (5) сразу получается выражение ω через θ.

Хорт рассматривает случай конкретной машины при помощи методы Рунге с большим трудом на девяти страницах, причем получает окончательно диаграмму ω как функции от θ.

Я проведу вычисления этой задачи на основании уравнения (5).

3. Я возьму таблицу 9, стр. 260 книги Рунге:

Dampftangentialkraft T, Effektive Tangentialkraft $T-W$. Tangentialkraft moment $F(\theta)=r(T-W)$, $W=1083$ kg, $r=0.3$ m.

	θ	T	$r(T-W)$		θ	T	$r(T-W)$
	0	0	−324.9		180	0	−324.9
	10	610	−141.9		190	400	−204.9
	20	1180	+ 29.1		200	800	− 84.9
	30	1810	+218.1		210	1210	+ 38.1
	40	2300	+365.1		220	1620	+161.1
Max	48	2600	+455.1		230	2040	+287.1
	50	2530	+434.1	Max	235	2220	+341.1
	60	2170	+326.1		240	2040	+287.1
	70	1830	+224.1		250	1780	+209.1
	80	1520	+131.1		260	1570	+146.1
	90	1270	+ 56.1		270	1390	+ 92.1
	100	1070	− 3.9		280	1220	+ 41.1
	110	860	− 66.9		290	1060	− 6.9
	120	710	−111.9		300	900	− 54.9
	130	530	−165.9		310	750	− 99.9
	140	440	−192.9		320	600	−144.9
	150	320	−228.9		330	460	−186.9
	160	200	−264.9		340	290	−237.9
	170	100	−294.9		350	150	−279.9
	180	0	−324.9		360	0	−324.9

Эту таблицу, как взятую из диаграммы индикатора, я беру целиком из книги Хорта. Пришлось только исправить очевидные опечатки. Надо было число $W=1056$ заменить на $W=1083$, потому что иначе было полное несогласие между рубриками таблицы. Далее в таблице T вместо 570 при 130° пришлось взять 530 и в таблице $r(T-W)$ вместо -248 при 340° взять -238.

Хорт закругляет числа таблицы, откидывая десятые доли. Я этого не делаю, так как при простых вычислениях, связанных со способом трапеций лишняя цифра не затрудняет, особенно при пользовании арифмометром.

4. Я приведу следующую таблицу полных вычислений по формуле (5).

θ	$C+2\int$	$\Delta 2\int$	$\varepsilon(\theta)$	ω^2	ω
0	19865.600	— 81.457	485	40.960	6.4000
10	19784.143	— 19.684	485	40.792	6.3869
20	19764.459	+ 43.136	485	40.751	6.3837
30	19807.595	+ 101.768	486	40.756	6.3841
40	19909.363	+ 114.500	486	40.966	6.4005
48	20023.863	+ 31.033	486	41.202	6.4189
50	20054.896	+ 132.655	486	41.265	6.4238
60	20187.551	+ 96.010	487	41.453	6.4384
70	20283.561	+ 61.982	487	41.650	6.4537
80	20345.543	+ 32.666	487	41.777	6.4635
90	20378.209	+ 9.109	487	41.844	6.4687
100	20387.318	— 12.355	487	41.863	6.4702
110	20374.963	— 31.201	487	41.837	6.4681
120	20343.762	— 48.476	486	41.859	6.4700
130	20295.286	— 62.611	486	41.760	6.4622
140	20232.675	— 73.604	486	41.631	6.4522
150	20159.071	— 86.168	485	41.565	6.4471
160	20072.903	— 97.685	485	41.387	6.4333
170	19975.218	— 108.155	485	41.186	6.4176
180	19867.063	— 92.450	485	40.963	6.4003
190	19774.613	— 50.570	485	40.772	6.3853
200	19724.043	— 8.167	485	40.668	6.3772
210	19715.876	+ 34.760	485	40.651	6.3758
220	19750.636	+ 78.211	486	40.639	6.3749
230	19828.847	+ 54.842	486	40.800	6.3875
235	19883.689	+ 54.842	486	40.913	6.3963
240	19938 531	+ 86.587	486	41.025	6.4051
250	20025.118	+ 61.982	487	41.119	6.4124
260	20087.100	+ 41.566	487	41.246	6.4223
270	20128.666	+ 23.243	487	41.332	6.4290
280	20151.909	+ 5.968	487	41.379	6.4327
290	20157.877	— 10.784	487	41.392	6.4337
300	20147.093	— 28.013	487	41.369	6.4319
310	20120.080	— 42.718	486	41.399	6.4342
320	20077.362	— 57.899	486	41.311	6.4274
330	20019.463	— 74.128	486	41.192	6.4182
340	19945.335	— 90.356	485	41.124	6.4128
350	19854.979	— 105.538	485	40.938	6.3983
360	19749.441	—	485	40.720	6.3813

В пояснение составления этой таблицы заметим, что первый столбец дает функцию

$$C+2\int_0^\theta$$

Для того, чтобы при $\theta = 0$ получить, как делает Хорт $\omega = 6.4$, необходимо было положить

$$C = 19865.600.$$

К этому числу надо добавлять части $\Delta 2 \int$ интеграла, взятые через каждые 10°. Эти части составляют второй столбец таблицы.

Так например, мы получаем при $\theta = 100^\circ$, применяя формулу трапеций

$$\Delta 2 \int = [f(100) + f(110)] \frac{2\pi}{36} = [-3.9 - 66.9]\, 0.1745 = -12.355.$$

Это число надо прибавить, к числу 20387.318, стоящему в той же строке первого столбца и мы получим

$$20387.318 - 12.355 = 20374.963,$$

т. е. следующее число первого столбца для $\theta = 110^\circ$.

Третий столбец составляет функцию $\varepsilon(\theta)$. Как мы видим она почти постоянная. Этот факт уже давно известен в теории паровых машин.

Разделяя число первого столбца на $\varepsilon(\theta)$, получим выражение для ω^2, которое у меня помещено в четвертом столбце.

Например, при $\theta = 100^\circ$

$$20387.318 : 487 = 41.863.$$

Извлечение корня квадратного из последнего числа дает искомую угловую скорость ω. Получаем

$$\omega = \sqrt{41.863} = 6.4702.$$

Извлечение корня квадратного я производил по пятизначным таблицам, предназначенным для этой цели и находящимся в пятизначных логарифмах Пржевальского. Для контроля я делал обратное возвышение в квадрат на арифмометре.

5. Сравнение моих результатов с диаграммой Хорта не дает хорошего совпадения. Это сравнение затрудняется тем, что мои вычисления, все от начала до конца, читатель может легко проверить, у Хорта же этого сде-

лать нельзя. Он ограничивается вычислением трех-четырех точек диаграммы и затем дает сразу всю диаграмму, не приведя относящихся к ней вычислений. Несмотря на то, что Хорт дает только для примера вычисление первых шагов различных таблиц, приводимых им, его изложение заполняет 8 страниц, причем он приводит четыре таблицы и четыре диаграммы. Наконец в конце он заявляет: «Streng genommen müsste man jetzt die ganze Rechnung mitdem genaueren Wert $\omega_0 = 6.40$ für die Totpunktegeschwindigkeit der Kurbel wiederholen».

6. У меня является большое сомнение относительно правильности вычислений Хорта на основании следующих соображений.

Так как Хорт не желает произвести предварительного интегрирования, то ему приходится вычислять значения не только функции $\varepsilon(\theta)$, но еще и значения ее производной $\varepsilon'(\theta)$. Мы видим у него на странице 259 следующую таблицу:

Tabelle 8

$$\frac{1}{2}\varepsilon'(\theta) = 1.07\,[\sin 2\theta + 0.4\,(\sin 2\theta \cos\theta - \sin\theta)]$$

0	0.000
10	+ 0.506
20	+ 0.927
30	+ 1.190
40	+ 1.259
50	+ 7.150 (?)

Для меня являлось непонятным, как функция $\varepsilon(\theta)$, которая почти постоянная, может давать такие большие значения для производной.

Хорт для наглядности дает диаграммы обеих функций $\varepsilon(\theta)$ и $\frac{1}{2}\varepsilon'(\theta)$: «Zur besseren Übersicht gibt Fig. 143 die Funktion $\varepsilon(\theta)$ graphisch wieder $\frac{1}{2}\varepsilon'(\theta)$ ist in Fig. 144 graphisch dargestellt» и читатель действительно видит на графике функции $\varepsilon(\theta)$ почти прямую линию, а на графике производной линию с громадными волнами вверх и вниз.

Чтобы догадаться, что такое случилось, я должен был посмотреть, как Хорт вычисляет производную $\frac{1}{2}\varepsilon'(\theta)$.

Оказывается, что он упрощает функцию

$$\varepsilon(\theta) = 485 + 2.15 \sin^2\theta \left(1 + 0.2 \frac{\cos\theta}{\cos\beta}\right)^2 -$$

$$- 0.12 \sin^2\theta \left(1 + 0.2 \frac{\cos\theta}{\cos\beta}\right) \frac{\cos\theta}{\cos\beta} + 0.2 \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\beta},$$

откидывая величины малые и приходит к формуле

$$\varepsilon(\theta) = 485 + 2.15 \sin^2\theta (1 + 0.4 \cos\theta)$$

и от этой последней формулы он берет производную, думая, что значения этой последней производной дадут ему правильные значения $\varepsilon'(\theta)$.

7. Оставляя в стороне вопрос о правильности вычислений Хорта, необходимо признать, что громадные вычисления по способу Рунге совершенно не соответствуют значению задачи. Диаграмма угловой скорости имеет, конечно, известное значение. По ней получается коэффициент неравномерности и скорость режима, но все-таки задача не на столько важна, чтобы производить столь большие вычисления. Я считаю, что и мой способ слишком громоздкий для этой задачи. Дело в том, что, так как в состав уравнения (5) входит квадратура, то можно приспособить к индикатору интегратор и машина сама без всяких вычислений вычертит необходимую диаграмму. Нечто подобное мы имеем при электрических приводах. Иногда помещают электрический регулятор при самой машине орудии, тогда рабочий может следить за действием машины за все время цикла.

8. Я считаю, что случай, разобранный Хортом, слишком простой. Это случай постоянного полезного сопротивления, когда цикл завершается на каждом повороте вала на 360°.

Мне кажется, было бы важно, если бы Хорт разобрал более сложный случай, например случай струга, когда цикл длится в продолжение нескольких поворотов вала.

9. Мне известно, что наши молодые ученые, инженеры и математики охотно читают книгу Хорта.

Я буду рад, если моя статья заставит читателей книги Хорта отнестись к ней с осторожностью, особенно в виду того, что она заключает ошибки также и в других местах.

31 I 1932.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ПРОБЛЕМА ВРЕМЕНИ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ[1]

В. И. ВЕРНАДСКОГО

1. Геохимия и время

1. Проблема времени ставится сейчас в научном сознании совсем по новому в той новой отрасли геологических наук, какой является геохимия.

Конечно, геологические науки, занимающиеся историей нашей планеты, все без исключения рассматривают изучаемые ими явления в разрезе времени. Это та их особеннность, которая, с одной стороны, связывает их с гуманитарными науками, а с другой, заставляет по особому относиться к ним философскую мысль. Развитие в XIX веке геологических наук поставило в теории познания проблему времени в новые рамки в тот момент, когда время не сознавалось в философии в настоящем его значении. Лишь в XX веке — благодаря огромным успехам научного знания — философская мысль подошла к проблеме времени и входит наконец в ту область явлений, которая вскрыта геологическими науками.

Среди всех геологических наук ни одна не проникает так глубоко и так по своему в проблему времени, как геохимия.

Это обусловлено тем, что геохимия занимается историей химических элементов, сводимой к истории атомов — основных единиц научно выраженного мироздания. Рассмотрение атомов в разрезе времени определяет своеобразие и глубину понимания времени в геохимии, вскрывает новую и неожиданную картину мирового бытия.

Но геохимия не только этим путем подходит к проблеме времени. Она подходит к ней и другой стороной своего содержания — изучением жизни, как одного из основных факторов химического механизма биосферы. Жизнь сводится в ней в первую очередь на изучение строющих ее атомов — их истории, — т. е. проявляется в том же разрезе времени.

[1] Доклад в Общем собрании АН 26 XII 1931.

Время связано в нашем сознании с жизнью. Это ярко проявляется в новой философской мысли в отождествлении времени — длення — с жизнью. В этом основа влияния идей Анри Бергсона, жизненной философии Георга Зиммеля.

2. Рассмотрение атомов в разрезе времени сказывается резче всего в **закономерной бренности** их существования.

Это точно и с несомненностью количественно мы пока знаем для 14 химических элементов из 92. Но весь огромный, точный эмпирический материал, лежащий в основе химии, ясно указывает, что мы имеем здесь дело с таким глубоким проявлением строения атомов, которое должно быть обще им всем. С другой стороны, сейчас, как только мы входим в области материальной среды, в которых сказываются большие интервалы времени, мы неизбежно, я бы сказал стихийно правильно, с этим научно не доказанным, но эмпирически из фактов вытекающим, как чрезвычайно реально вероятное, свойством материи считаемся.

Дело в том, что закономерная бренность атомов, взятая в целом, ясно видна только в большой мере времени. Поэтому она исчезает из кругозора химика, в обычной работе имеющего дело с химическими элементами в пределах человеческого или исторического времени. Она уже ясно проявляется для геохимии в пределах геологического времени и она приобретает основное значение для истории атомов в реальном мире, взятом в его наиболее общем выражении, в пределах космического времени, в космохимии, части астрофизики, науки, быстро созидающейся на наших глазах. Геохимия часть космохимии.

В химии Космоса проблема закономерной бренности атомов является основной. Без этого допущения теряется почва современного научного изучения Космоса.

3. Закономерная бренность химических элементов, их генетическая связь, происхождение одного из другого, выявляется только при изучении их, как атомов.

Поэтому основное свойство материальной среды научно изучаемой — закономерная бренность всех ее проявлений — в его наиболее глубоком выражении является объектом изучения наук об атомах, сложившихся в XX веке, в физике атомов, в радиохимии, в геохимии и наконец в космохимии.

Мысль о закономерной бренности атомов, может быть выражена в другом образе, более удобном для философского мышления, более общем: **время есть одно из основных проявлений вещества, неотделимое от него его содержание.**

Это определяет огромное, далеко выходящее за пределы науки, значение для мысли тех областей знания, где это свойство материи выражено наиболее резко, в первую голову будущей космохимии и сейчас сложившейся геохимии.

4. На основных чертах закономерной бренности атомов прежде всего мне необходимо здесь остановиться.

Выясняется, что для каждого рода атомов есть определенное время их бытия. В среднем, каждый атом существует, сохраняя свое определенное строение, строго определенное время.

Минимальное среднее время существования, сейчас учитываемое для одной из атомных форм химического элемента полония — для атома ThC′ — равно немногим стобиллионным долям секунды. Это число не может считаться окончательно установленным.[1] Но для другой формы того же полония, для атомов RaC′, оно установлено точно: эти атомы в среднем существуют каждый в течение около трех миллионных долей секунды (P. Joliot. 1930). С другой стороны, наибольшая измеренная средняя длительность для химического элемента, для тория, его бытие приближается к 50 биллионам лет. Для всех других химических элементов, кроме сильно радиоактивных, средняя продолжительность их бытия много больше. Для земных элементов она исходя из тепловых эффектов прикидывается в 10^{17} лет (J. Jeans. 1928), 10^{23} лет (J. Poole. 1928). Пока мы только это и можем утверждать.

Диапазон бытия атомов таким образом огромен: стобиллионные или миллионные доли секунды, с одной стороны — десятки биллионов, а может быть больше квинтильонов лет, с другой. В действительности бо̀льшая цифра вероятнее, ибо научно найденная, верхняя, граница явно минимальная и далекая от конца.

5. Для каждого рода атомов есть своя неизменная чреда. Это есть основное эмпирическое обобщение. Есть и другое. Процесс закономерной бренности атомов неизбежно и непреоборимо происходит. Темп его среднего хода не меняется. Мы не знаем ни одного явления природы, ни одной силы, которая влияла бы на темп его существования — могла бы его остановить или повернуть. Есть серьезные основания думать, что проявления энергий, для этого необходимых, не могут иметь места в солнечной системе, не говоря уже о Земле.

[1] В новейшей сводке Международного радиевого стандартного комитета (сентябрь 1931) 10^{-11} секунды для ThC′ принимается с двумя вопросительными знаками. Установлено пока, что эта величина — T — **меньше** одной миллионной доли секунды.

Это показывает, что этот процесс является в нашем научном понимании мира одним из основных. Он определяет основные свойства неделимых, строящих научно выявляемый космос, свойства материи.

6. Процесс, определяющий бренность атомов, идет неизбежно и непреодолимо в строго определенном направлении, всегда в одном и том же. Мы выражаем это, говоря, что это необратимый процесс.

Выражая такой процесс в пространстве, которому отвечает совокупность атомов, в функции времени — время неизбежно выразится в форме прямой линии определенных свойств. Это будет полярный вектор, т. е. для данной линии между точками А и В направление АВ физически резко отлично от направления ВА, ибо процесс идет только в направлении АВ.

Беря историю любого атома в космическое время, мы видим, что он через определенные промежутки времени, сразу, одинаковыми скачками, в направлении полярного вектора времени, переходит в другой атом, другой химический элемент. Процесс этого перехода таким образом ритмический.

7. Те же явления наблюдаются и для неделимых жизни, другого объекта геохимии.

И здесь для каждой формы организмов есть закономерная бренность ее проявления: определенный средний свой срок жизни отдельного неделимого, определенная для каждой формы своя ритмическая смена ее поколений, необратимость процесса.

Для жизни время — с геохимической точки зрения — выражается в трех разных процессах: во-первых, время индивидуального бытия, во-вторых, время смены поколений без изменения формы жизни и, в-третьих, время, эволюционное — смены форм одновременно со сменой поколений.

В отличие от бренности атома для бренности жизни ясно влияние внешней среды на время для жизни характерное. Но это влияние ограниченно. Индивидуальная жизнь многоклеточного имеет предел: он может быть отодвинут в благоприятных условиях, но конец неизбежен и неотвратим. Для одноклеточных как-будто нет предела бытия, связанного с неделимым, но живя во внешней среде — в мире «случайностей» — неизбежно и здесь индивидуальная жизнь рано ли, поздно ли кончается под влиянием внешних условий. В благоприятных условиях можно неизбежный конец только отодвинуть.

В ничтожных отдельных случаях, как и в атомах, отдельные неделимые — одноклеточные — могут зайти далеко за пределы среднего бытия. Они могут быстро погибнуть, могут далеко пережить современников, но средняя величина — порядок явления — от внешних явлений не зависит. Он

зависит или от строения самого организма (и атома) или от всей совокупности научно выявляемых явлений — целокупной для нашего понимания реальности всего мира.

Явное отсутствие для явлений жизни абсолютной неизменности, отсутствие ее независимости от внешней среды, что наблюдается для атомов, может быть связано с нашим мыслительным аппаратом: в явления жизни мы проникаем глубже, чем в мир атомов. Мы к ним ближе. Ибо, являясь сама частью жизни, научная мысль обладает в этой области такой мощью проникновения в окружающее, какой она не имеет в далеких от организма проявлениях мира. Возможно, что и там нет абсолютной неизменности — она лишь временно скрыта от нашего аппарата познания. Но в пределах солнечной системы, а повидимому и галаксии, она есть.

В процессы, связанные с временем, мы, часть явлений жизни, проникаем не только из научного изучения внешней природы: мы им переживаем.

8. Интервалы времени, характеризующие бренность атомов и бренность организмов, различны по величине, но эти различия меньше, чем можно было бы думать, если бы в явлениях этих не было чего то общего.

Разница между наиболее короткой средней длительностью — длением — атома и его, пока допустимым максимальным средним бытием, равна десяткам окталлионов раз, порядку 10^{38}, для минимально реально наблюденных 10^{21}.

Ясно, что минимальная величина не отвечает действительности так как несомненно, что для таких элементов, как железо или кремний, например, средняя длительность их бытия в десятки раз превышает среднюю длительность атома тория, здесь принятую во внимание. Она не выражает еще всего явления, отвечает преходящей, но не прошедшей неполноте нашего знания. Мало, однако, вероятно, чтобы эта неполнота знания изменила максимальное число Джона Пуля (§ 4).

9. Для неделимых жизни — для времени индивидуального бытия — тоже можно дать сейчас точно только минимальные числа. Ибо размножающиеся делением одноклеточные организмы нам представляются не имеющими предела существования. Они ограничиваются в нем только воздействием внешней среды и, принимая это воздействие, как проявление случайных причин, приходится допустить, что в реально наблюдаемом случае, в биосфере, размножение одноклеточного — делением без умирания — длится столько, сколько длится жизнь в биосфере, т. е. 1.5—2 миллиарда лет. Самый краткотечный многоклеточный индивид живет часы.

Размах времени достигает десятков триллионов, 10^{13}.

И здесь коэффициент 13 изменится при дальнейшем изучении. Возможно, что это изменение будет много больше, чем для такого же коэффициента в атомах, ибо допустимо предположение о безграничности бытия одноклеточного организма.

Для эволюционного времени жизни мы тоже пока имеем для размаха число минимальное, так как есть формы жизни неизменные с кембрия или даже может быть с альгонгка, т. е. порядка 10^8—10^9 лет. Но это число недостаточно для оценки размаха существования вида, ибо мы не умеем пока оценивать его длительность в отдельных случаях, не знаем минимальной естественной длительности вида или расы. Для времени смены поколений размах отвечает всего миллионам.

Хотя числа для неделимых мира и для неделимых жизни получаются резко разного порядка, но порядки чисел сравнимы. Явление явно имеет общие черты: большую величину размаха, неизбежность и неотвратимость бренности бытия, необратимость процесса.

Такое сходство особенно бросается в глаза при разнородности сравниваемых тел. Атомы суть элементы мира; они строят всю реальность, — неделимые жизни на немногих, теряющихся в космосе, планетах, в их поверхностных пленках, в биосферах, составляют их ничтожную по массе вещества часть.

10. Можем ли мы в этих сходных проявлениях времени в столь глубоко нам представляющихся различными явлениях природы видеть свойства времени или нет?

Еще недавно в сознании ученых на этот вопрос мог быть только один ответ — ответ отрицательный. И его в аналогичном случае незадолго до своей смерти, в 1912 г., ярко и определенно выразил великий ученый и глубокий мыслитель Анри Пуанкарэ, категорически утверждавший, что наука не изучает время, но изучает проявление природных процессов в ходе времени, от явлений абсолютно независимого.

В таком случае сходные черты в проявлении времени в обоих основных неделимых области, изучаемой геохимией, указывали бы на сходства самих объектов, но не на свойства времени.

Сейчас мы научно так просто и так категорически ответить, как ответил недавно Пуанкарэ, не можем.

Для того, чтобы оправдать это утверждение, мне необходимо, конечно вкратце, остановиться, во-первых, на основных чертах, характеризующих научное знание в отличие от других его форм и, во-вторых, выявить резкое

и коренное изменение, какое произошло в научном понимании времени после того, как Анри Пуанкарэ исчез из круга живых.

2. Основные черты научного знания. Положение в нем проблемы времени

11. Прежде всего об особенностях научного знания, отличающего его от других форм знания.

Научное знание в двух своих проявлениях резко и определенно отличается от всякого другого знания: философского, религиозного, от «народной мудрости», «здравого смысла» — бытового, векового знания человеческих обществ. Оно отличается тем, что определенная, значительная и все растущая его часть является бесспорной, общеобязательной для всех проявлений жизни, для каждого человека. Она аксиоматична для человеческого общества, ибо она логически обязательна для человеческого сознания. И во-вторых, научное знание отличается особой структурой значительной части своих понятий, как способом их получения, так их мыслительным анализом.

В основе научного знания стоит проникающее всю сущность науки — аксиома — сознание реальности объектов изучения, сознание реальности для нас проявляющегося мира. Только в этих пределах наука существует и может развиваться.

Это сознание обуславливает непреложность, логическую непреоборимость правильно сделанных научных выводов для всех людей без исключения, для всех случаев без исключения. Оно является скрытой основой социального бытия, ибо и жизнь и быт людей тоже проникнуты до конца сознанием реальности того же мира, который изучает наука. Создается единый общеобязательный неоспоримый в людском обществе комплекс знаний и понятий для всех времен и для всех народов.

Мы сейчас переживаем исторический опыт, это доказывающий, яркое проявление такого единства, такой общеобязательности научного знания.

После долгого периода, в течение которого прошло около сотни поколений, научные достижения нашей цивилизации охватили людей чуждых нам древних великих культур — индийского и китайского центров. И мы видим, что они в этой, чуждой их быту, духовной обстановке не только сразу осознали единый язык научных понятий, но сразу вошли в научную работу, оказались в первых рядах, оказались мастерами дела.

12. Эта общеобязательность и непреложность выводов охватывает только часть научного знания — математическую мысль и эмпирическую основу знаний — эмпирические понятия, выраженные в фактах и в обобщениях. Ни научные гипотезы, ни научные модели и космогонии, ни научные

теории, возбуждающие столько страстных споров, привлекающие к себе исторические и философские искания, этой общеобязательностью не обладают. Они необходимы и неизбежны, без них научная мысль работать не может — но они преходящи и в значительной, не определимой для современников, степени, всегда неверны и двусмысленны; как Протей художественной отчеканки они непрерывно изменчивы.

Общеобязательны и основны для картины научной реальности эмпирические понятия — эмпирические факты и такие же обобщения.[1] Они строят научное мироздание, «Природу» ученых XVIII столетия.

Эмпирические понятия резко отличаются от обычных понятий, от понятий философии в частности, тем, что они в науке непрерывно подвергаются не только логическому анализу, как слова, но и реальному анализу опытом и наблюдением, как тела реальности.

Слова, такой реальности отвечающие, в словах изреченный научный факт и фактам отвечающая научная мысль — научное понятие, всегда подвергаются не только логическому анализу нашего мыслительного аппарата, неизбежно проникнутого личностью, — они одновременно подвергаются в течение поколений, непрерывно опыту и наблюдению; ими, а не одной логикой исправляются; при этом в опыте и в наблюдении стирается проявление индивидуальности, личности.

«Мысль изреченная есть ложь» в великом образе в стихотворении «Silentium» сказал Федор Иванович Тютчев. В науке мысль, выраженная в изречении непрерывно соприкасается — реальным научным трудом — со своим исходом, с землей-матерью, говоря образно, с тем, от чего она отнята в момент, когда она рассматривается только как изречение.

Верный и глубокий образ Тютчева к научной мысли не относится. Изречение ее не всю охватывает. Динамически опыт и наблюдение непрерывно восстанавливают ее связь с реальностью.

Эта особенность эмпирического понятия есть такое же логическое следствие признания реальности мира, как общеобязательность научных выводов.

В этом, основном ее свойстве, заключается отличие научной мысли от всякой другой — философской в том числе.

13. В какую же часть научного мировоззрения попадет научное понятие времени? Является ли оно частью сменяющегося и преходящего построения научных моделей, гипотез, теорий? Или же оно является

[1] Эмпирические обобщения только частью захватывают то что, называлось, а иногда и теперь называется «законами природы». О них см. В. Вернадский. Биосфера. Л. 1926. § 12.

частью реальности мира в научном ее понимании, одним из основных эмпирических обобщений, на которых строится все наше научное знание?

Мне кажется, здесь сомнений быть не может: понятие времени есть одно из основных научных эмпирических обобщений. Если оно и не было открыто научным мышлением: оно в течение нескольких тысяч лет проверяется и обрабатывается научным опытом, наблюдением, научной мыслительной работой.

На опыте и на наблюдении оно основано, и во всяком эмпирическом факте и обобщении мы прямо или косвенно с ним, так же как с пространством, сталкиваемся.

На этом научная мысль стоит незыблемо, хотя в ходе ее истории представление о времени резко меняется прежде всего под влиянием философской и религиозной мысли.

3. Пространство и время в понимании Ньютона и в науке XVIII—XIX веков

14. Научное представление о времени, царившее в эпоху эллинской научной мысли, было потеряно в нашем центре цивилизации в начале второй половины первого тысячелетия нашей эры. Оно было заменено более далеким от научной реальности ложным построением. Последнее проявление более правильных представлений, правда неполное, известно нам в христианской среде в VI столетии у Иоанна Филопона, теолога, ученого и философа, стоявшего вне господствующей церкви.

Две черты, позже потерянные или ослабленные, характерны для эллинской науки: во-первых, ясное представление о времени физическом или математическом, как мере движения, и во-вторых, убеждение в безграничности времени.

С торжеством христианства эти представления исчезли или ослабли в нашем центре цивилизации.

В ослабленной степени они держались некоторое время в те века, когда научная работа еще шла в нашем центре цивилизации, в мусульманской среде, так как мусульманская религиозная мысль не приняла, как догму, древнееврейского представления о кратковременности научной реальности, окружающей нас природы, о близости конца мира.

В своеобразной форме древние эллинские представления о безграничности мира сохранялись в идеях о бессмертии личности и о вечности мира, но не мира, о котором говорят ученые, не той реальности, «природы», которая единственно является объектом изучения науки. Конца этого мира, этой реальности, ждали, к нему готовились столетия. Больше полуторы тысячи лет

научная работа в нашем центре цивилизации шла в среде, с часу на час иногда, ожидавшей конца той реальности, которая составляет объект изучения науки, в среде, верящей в бренность мира, в близкий конец научного искания.

Вплоть до средины прошлого века наука вынуждена была реально считаться с представлением о времени, отвечающем области ее изучения, равным немногим тысячелетиям.

Это принимал Ньютон, и это пытался научно сделать понятным Эйлер через поколение после него, опираясь на быстроту размножения организмов, на чрезвычайную геохимическую энергию жизни.[1]

В сущности вплоть до середины XIX века европейско-американская научная мысль вращалась в чуждой и во враждебной ей обстановке понимания длительности реальности, объекта своего изучения.

В эти века правильное представление о длительности реальности было живо в философски и религиозно мощной среде индийского культурного центра. Но здесь глубокая работа философской мысли, ее господство, заглушила к этим столетиям научное творчество.

Рост геологических наук, сложившихся в первой половине XIX века, и, на фоне их, новое научное построение явлений жизни, приведшее к эволюционному пониманию ее форм, положило конец исторически создавшемуся тяжелому для науки положению, ярко проявившемуся в глубоком трагизме, в каком пришлось жить многим поколениям ученых и бороться с религией и с философией за свободу научного искания, за истину в научном ее выражении.

Научная мысль расчистила поле своей работы, вернулась к исходным достижениям эллинской науки, быстро двинулась дальше, когда геологические науки в XIX веке заставили и религию и философию силой логики и жизненных приложений склониться перед научным фактом и переделать свои построения.

15. Эллинская обстановка для научной работы о времени возродилась в науке в XVI—XVII столетиях. Длительность — безграничность времени, была ярко выражена в натурфилософских концепциях Джордано Бруно, проникших в науку, — а понимание времени, как меры движения, было вновь в неизвестном для древности совершенстве введено в науку Галилео Галилеи (1581—1591).

Он реально впервые ввел время в научное миропонимание, как великую координирующую научную мысль силу в выявленных им математически законах движения.

[1] Он дал связанную с этим формулу в работе Иоганна Петера Зюссмилька (1741).

Это Галилеево представление о времени независимо от того, какое царило позже в науке XIX века; оно самодавлеюще. Отдельные умы держались его и в течение прошлого столетия, оставаясь в стороне от господствующих представлений. Так его придерживался и в мышлении и в преподавании в Казанском университете в первой половине XIX столетия Николай Иванович Лобачевский. В записях его лекций сохранилось его определение времени: «Движение одного тела, принимаемое за известное для сравнения с другим, называется временем».

16. Через столетие после Галилеи, Исаак Ньютон ввел то понимание времени, которое наложило печать на всю научную мысль и научную работу вплоть до наших дней.

В 1686 г. кембриджский профессор И. Ньютон определил время следующим образом: «абсолютное, настоящее и математическое время само по себе и по своей природе равномерно течет безотносительно ко всему окружающему».

В этом определении ясно для современников, и что̀ мы сейчас можем точно исторически выявить, отразились два искания жизненной правды, глубочайшим образом охватившие его великую личность. Он стремился выразить время так, чтобы можно было точно вычислять и научно представлять систему мира и выразить время Галилея в форме, отвечавшей духовному началу мира, сознанием существования которого была охвачена вся жизнь Ньютона. Ибо он сознательно провел всю свою жизнь в искании правды; а для него ею не была только научная истина. Он был не только великим ученым, но и ученым теологом. В его научных концепциях ярко отразилось его религиозное сознание в рационалистическом его выражении.

Для Ньютона абсолютное время и абсолютное пространство были атрибутами, непосредственным проявлением Бога, духовного начала мира. Это ярко проявилось и в его переписке с Ричардом Бентлеем в конце XVII века и в начавшемся в 1715 г. публичном споре, охватившем в первой половине XVIII века европейскую мысль, между близким Ньютону математиком-теологом Самуилом Кларком, отвечавшим Лейбницу вместо Ньютона, и Готфридом Лейбницем, обвинявшим направление и понимание мира Ньютоном и его последователями в атеизме.

Сейчас научно выявилась историческая сложная структура теории всемирного тяготения, включающей, как неразрывную часть, новое для человечества Ньютоново понимание времени. Она сложилась из трех элементов: 1) из научных эмпирических обобщений и фактов, в том числе Галилеева понимания времени, как меры движения, 2) из логически глубоко

продуманного представления об едином боге-творце, отвечавшем пониманию наиболее свободных протестантских сект, близких к арианству, и 3) из религиозно-философских идей кембриджских платоников, в том числе близкого Ньютону Генри Мора.

17. К середине XVIII века, через несколько десятков лет, Ньютоново представление об абсолютном времени, в котором развертываются явления, изучаемые наукой, прочно и надолго овладело наукой.

С этой поры время исчезло как предмет научного изучения, ибо оно было поставлено вне явлений, понималось как абсолютное.

Представление Ньютона победило в науке благодаря небывалым раньше в ее истории достижениям, тесно связанным с построениями Ньютона об абсолютном времени и о таком же пространстве.[1] Впервые была выражена система мира до конца вычисляемая. Создана была новая наука — механика, научное построение не меньшего порядка, чем система мира. На фоне идей Ньютона впервые после успехов эллинской мысли, через тысячелетия после создания геометрии, вновь сложилась равная геометрии по глубине проникновения в реальность наука о движении, механика — величайшее создание человеческого гения, неразрывно связанная с идеей времени.

И для нее в 1747 г. Леонард Эйлер принял абсолютное время.

И для Эйлера это принятие связано было с его пониманием духовного начала мира.

4. Создание нового понимания времени, понятия пространства-времени.

18. Новое представление о времени входит в науку на смену понятия, созданного Ньютоном, только в нашем столетии.

Это понятие об едином и неразделимом пространстве-времени.

С ним стали считаться только в 1905—1911 гг. на почве теории относительности Альберта Эйнштейна. Но это историческая случайность. Само понятие о пространстве-времени независимо от теории относительности. Оно возникло, зародилось и даже получило свое обоснование вне теории относительности, раньше нее. Пространство-время теории относительности есть одно из многих пониманий пространства-времени.

19. Понятие пространства-времени было в общей форме впервые ярко и определенно обосновано глубоким и оригинальным венгерским философом, одно время профессором физики в Будапеште, Мельхиором Паладием

[1] Для идеи пространства Ньютона предшественниками явились в XVI в. Франческо Патрицци и в XVII веке Пьер Гассенди.

(M. Palágyj), умершим в 1924 г. Оно стало известным в 1901 г., когда Палади опубликовал на немецком языке в Лейпциге отдельной книжкой небольшой, но очень глубокий и замечательный трактат «Новая теория пространства и времени», недавно перепечатанный.

Я не могу здесь излагать ни теории Паладия, ни других представлений о пространстве и времени. Моя задача заключается в том, чтобы наметить совершившийся и совершающийся переворот мысли и сделать ясными основные, вытекающие из этого переворота следствия и новые направления научного понимания реальности.

Книжка Паладия прошла незамеченной. В 1908 г. в связи с теорией относительности бреславльский профессор Герман Минковский в произведшей огромное впечатление речи на съезде математиков в Кельне поставил новое понятие об едином, неделимом пространстве-времени и о времени, как четвертом измерении пространства — о пространственно-временной непрерывности — ярко и определенно перед мыслящим человечеством, как начало нового понимания мира. Оно было сейчас же воспринято Эйнштейном.

20. Мы видим уже сейчас, а в дальнейшем история науки выяснит это еще яснее, что к идее о реальном едином неразделимом пространстве-времени подходят давно и уже со времен Ньютона отдельные мыслители с этим представлением считались в своей мысли и в своей научной работе в течение XVIII и XIX столетий.

Вместе с тем в полном согласии с этим представлением и в противоречии с абсолютным пространством и с абсолютным временем Ньютона понимание в науке реального физического времени и особенно реального физического пространства в текущей научной работе претерпело такие глубокие изменения, что к XX веку, когда происходит вхождение в науку нового представления на смену Ньютонову, почва оказалась чрезвычайно подготовленной. Это часто несознаваемое изменение — подземная работа мысли — началось еще при жизни Ньютона и получило мощное движение со второй половины XIX века.

21. На неразделимость пространства-времени указывал, как на возможное представление, мимоходом, не развивая идеи, Джон Локк в своих работах, которые изучаются и читаются непрерывно до сих пор с конца XVII века всяким вступающим в философскую мысль. Мы увидим позже, что Локк же является родоначальником нашего современного философского анализа времени. Мы должны поэтому считать, что при тщательном и внимательном чтении сочинений Локка, которым они подвергались в реальной, беспрерывно возрождающейся философской эрудиции, его мимоходные мысли

не могли быть не замечаемыми, должны были влиять. Тем более, что ряд новых, живых философских построений конца XIX, начала XX века создающих любопытные построения времени произошли от Локка, к нему ведут мысль, связаны с его изучением (напр. философия Альфреда Норс Уайтхеда).

От эпохи творения механики, от 1754 г., сохранилось указание одного из видных участников в ее создании Жана Ларонд д'Алямбера о том, что один из его друзей — он его не называет — указывал ему на возможность в механике принять время, как четвертую коодинату пространства — то̀, что сделал в XX веке Минковский. Несколько позже, в XVIII же веке, другой еще более крупный математик и механик, младший современник д'Алямбера, Жозеф Люи Лагранж высказал эту мысль ясно и определенно. Идея Лангранжа никогда не забывалась не только в среде математиков, но и в среде философов. В 1846 г. в философских парадоксах д-ра Мизеса оригинальный, глубокий философ и ученый Густав-Теодор Фехнер образно пытался представить мир, чуждый Ньютонову пониманию времени, возможный в таком четырехмерном пространстве. Более глубоко в конце столетия это выразил историк науки и психолог Людвиг Ланге, подходил к этому Эрнст Мах.

Почва была: она дала всходы в концепциях Паладия, Эйнштейна, Минковского.

22. И Палади и Минковский ясно понимали производимый ими величайший переворот в человеческом сознании, в нашем понимании реальности.

Сейчас нам важно не конкретное содержание понятия пространства-времени, резко различного у Паладия и Эйнштейна, но само вхождение в научную мысль новой концепции времени, производимое этим коренное изменение основной картины научно-построяемого Космоса, всей научной мысли.

Прежде всего пространство-время становится объектом научного исследования наравне со всем остальным содержимым реальности. Какую именно форму надо придать пространству-времени, именно это должна сейчас выяснить наука. Это — новая и важнейшая ее проблема. Мы возвращаемся, их развивая, к до-Ньютоновским построениям — к Галилею и к другому великому представителю науки XVII века — к Христиану Гюйгенсу.

Стало конкретной научной задачей то, что больше 150 лет стояло вне рамок научной мысли.

Не менее важно и другое следствие. Очевидно, раз пространство и время являются частями, проявлениями и разными сторонами одного

и того же неделимого целаго, то нельзя делать научные выводы о времени, не обращая внимания на пространство. И обратно: все, что отражается в пространстве, отражается так или иначе во времени.

И, наконец, третье, в науке впервые научно прочно стал вопрос, охватывает ли пространство-время всю научную реальность? Или могут быть научно охвачены и есть явления вне времени и вне пространства.

В квантах мы имеем мне кажется дело с такого рода научными представлениями.

5. Изменение реального понимания пространства до создания понятия пространства-времени

23. Сейчас, когда научная критическая мысль подошла вплотную к основной идее системы мира Ньютона, к абсолютному пространству и к абсолютному времени — мы видим, что в науке реальное физическое пространство давно уже не является абсолютным.

За 244 года оно претерпело коренное изменение.

Научная мысль в своей текущей работе по мере нужды вносила в реальное понимание пространства глубочайшие изменения, не считаясь с тем, насколько это понимание логически стройно, насколько оно совместимо с абсолютным пространством.

Эти изменения были произведены одновременно по двум непрекаемым путям научной мысли, перед которыми все и всё должны склоняться, как перед научной истиной — ростом математической мысли, менявшей пространство древней геометрии, единственное известное Ньютону, и ростом эмпирического знания, коренным образом перерабатывавшим физическое пространство.

24. Ньютон в основу понимания природы положил абстрактное пространство геометра, характеризуемое в этом аспекте в конце концов метрикой, метрикой геометрии древних.

Он определил его так: «Абсолютное пространство по своей собственной природе и безотносительно ко всему остается всегда неподвижным и неизменным».

Научный исследователь природы сталкивается в действительности с пространством и в других его проявлениях помимо метрических его свойств. Пространство геометрии времени Ньютона неизбежно является пространством изотропным и однородным. Ему отвечает абсолютная пустота.

С таким абсолютным пространством — пространством древней геометрии трех измерений, — пустым, однородным, изотропным — исследователь природы реально не встречается.

Может идти речь только о небольших относительно участках, где к такому состоянию физическое пространство приближается, но и то по мере уточнения научной методики давно стало ясным, что такие части пространства неизменно уменьшаются в размерах, сходят на нет. К середине XIX столетия выяснилось, что они и геометрически не реальны.

25. В течение всего XIX столетия, с его начала и даже с конца XVIII столетия, шла огромная творческая работа геометрической мысли, связавшая, с одной стороны, геометрию по новому с числом, и, с другой стороны, изменившая в корне ту однородность пространства, которая логически неизбежно приводила к отождествлению в представлении натуралиста геометрического пространства с абсолютной пустотой.

Новая геометрия — создание XIX века, стоявшее вне кругозора и сознания Ньютона — подготовила почву для того коренного перелома в понимании пространства и времени, которое мы сейчас переживаем в науке.[1]

Лишь на фоне ее развития могут быть ясно осознаны и могли проявить свою научную мощь те изменения, какие эмпирическая научная работа заставила внести в понимание физического пространства, единственного, с которым она имела дело.

26. Идеи Ньютона входили в жизнь с большим трудом; борьба шла десятки лет; лишь через 20—30 лет после его смерти, в 1730—1750 гг. его представления окончательно охватили научную мысль. Долго держались и царили научные гипотезы и теории Рене Декарта и картезианцев, крупных современников Ньютона, как Гюйгенс, Лейбниц, Роберт Гук и другие. Они все были резко противоположны абсолютному пространству.

В одной части это представление никогда целиком не могло охватить научную мысль. Пространство абсолютное, пустота признавалась в научной работе всегда немногими.

Идеи Ньютона вошли в физику без принятия пустого пространства.

Еще при жизни Ньютона для объяснения явлений света в научную мысль Х. Гюйгенсом было введено понятие эфира, непрерывно заполняю-

[1] Новая геометрия в сущности касается пространства-времени, но не пространства, ибо время введено и основные положения в понятиях движений, геометрических преобразований, деформаций. Без представления о движении не могла быть построена и геометрия эллинов, но в ней его роль была сведена до minimum'а.

щего все пространство. Движение материальных тел системы мира должно происходить в эфире.

Тот же эфир проникает все тела и объясняет те явления передач энергии, которые мы например наблюдаем в явлениях света.

История идеи эфира, создания древне-эллинской мысли, имеет длинное прошлое, но на ней я здесь останавливаться не могу.

Важно лишь отметить, что это понятие позволило Х. Гюйгенсу и поколениям ученых, шедших по его пути, внести в картину мира ряд явлений, по новому захваченных количественно законами механики, законами движения. Гюйгенс, еще более чем Ньютон, считал, что в науке все должно быть сведено к движению, и он был тот человек, который применением законов маятника к исчислению времени, созданием удобных и точных в человеческом быту часов, глубочайшим образом повлиял на наше чувство времени, выражаемое в числе. Несовместимый по существу с абсолютным пространством, световой, всемирный эфир охватил физическую мысль рядом с всемирным тяготением.

27. Волнообразные явления, дававшие объяснение свету, широко позже использованные в геометрических представлениях о других проявлениях энергии, резко по существу отличны от движений материальных тел системы мира Ньютона. Материальные тела в этой системе реально передвигались с определенной скоростью в абсолютном пространстве под влиянием мгновенно (вне времени) действующей силы всемирного тяготения.

Понятие о силе тяжести, быстро перешедшее в понятие всемирного тяготения, не было дано Ньютоном. Он публично и в частной переписке против него возражал.

Оно было введено в научную мысль в 1713 году в предисловии ко второму изданию Philosophiae Naturalis Principia кембриджским профессором Роджером Котсом, редактором этого второго издания, как одно из возможных, логически связанных с математическими выводами Ньютона представлений. Ньютон высоко ценил Котса, вскоре умершего молодым, но его предисловия он, официально по крайней мере, не читал...[1]

Я не могу здесь вдаваться в изложение причин такого отношения Ньютона к появлению идеи, против которой он всегда возражал, в предисловии к его труду. Но именно идея всемирного тяготения наложила печать на всю научную мысль следующих двух столетий, была принята, как следствие достижений Ньютона, как Ньютонова идея.

[1] Оно было принято и одобрено С. Кларком по поручению Ньютона. Оно связано с теолого-философскими идеями.

Мысль Ньютона склонялась к другим физическим представлениям о всемирном тяготении. Недавно (1928) одно из них, швейцарца Николая Фатио де Дюлье (N. Fatio de Duillier. 1664—1753),[1] Ньютоном одобренное, найдено и напечатано.

28. В отличие от движения материальной среды, движения эфира — волнообразные движения света — проявляются в передаче состояний энергии без переноса на всем протяжении в направлении движения каких бы то ни было реальных частиц. Здесь скорость движения определяет скорость передачи состояния материальных частей, которые могут оставаться неподвижными или меняться очень незначительно в своем положении. Ясным представляется, что скорость такой передачи состояний вещества (в направлении движения) и скорость реального материального его переноса (в направлении движения) не могут à priori быть рассматриваемы, как явления и как понятия одного рода, как явления, до конца сравнимые. Это требует доказательства.

Логический и теоретикопознавательный анализ этих двух разных понятий о скорости явлений приобретает сейчас особое значение, так как он тесно связан с философскими и научными исканиями нашего времени, вызванными теорией относительности. Больше того, он связан с критикой и пониманием самой теории относительности.

Здесь я могу это лишь отметить.

Для нас сейчас важно, что заполненное эфиром пространство не есть пространство Ньютона и что так выраженное пространство в дальнейшем подверглось еще более глубокому изменению.

Это изменение связано с выявлением его особого строения — прежде всего его неоднородности, но также его анизотропности.

29. В 1800 г. Алессандро Вольта, создатель Волтова столба, поставил в центр внимания проблему проявлений электричества при простом соприкосновении разнородных тел.

Его объяснение не удержалось для того частного случая, для которого оно было дано — но оно возбудило длительные споры, — решавшиеся не логикой, а опытом и наблюдением — приведшие в конце концов к познанию новых свойств пространства, к проявлению его неоднородности.

На границах неоднородной среды, в самых разнообразных ее случаях развиваются разнообразные силы, могущие производить работу.

[1] Это было представление, близкое к высказанному позже швейцарцем Жоржем Люи Ле Сажем (1764. G. L. Le Sage. 1724—1803).

Неоднородность физического пространства выявляется динамически. Она вечно меняется — меняется и во времени.

Так как все реальное пространство состоит из разнородных частей, эта динамическая неоднородность проникает все реальное пространство.

Я и здесь могу только коснуться этого мощного явления.

Мне важно лишь отметить, что подобно тому, как пространство, заполненное эфиром — отсутствие в окружающей реальности пустоты — так и динамичность неоднородности пространства, возбуждение на разнородных соприкосновениях энергии, могущей производить работу, придают физическому пространству исследователя природы свойства резко отличные от пространства геометра XVII—XVIII веков, от абсолютного пространства Ньютона.

Пространство физика не характеризуется прежде всего метрикой древней геометрии, как это имеет место для пространства Ньютона.

30. На почве этих двух представлений, охватывающих все пространство, развились более частные идеи, указывающие на существование в реальном пространстве отграниченных областей, с особым строением, проявляющихся разным образом только при изучении отдельных совокупностей явлений.

Очевидно, и в этих отдельных областях время должно иметь особые свойства. Сами эти области закономерно бренны.

Эти течения мысли возникают в XIX веке, главным образом во второй его половине, и идут в XX столетие.

Сейчас для пространства-времени они приобретают первостепенное значение.

Отмечу главнейшие. Они все изошли из эмпирического научного опыта и наблюдения.

К середине прошлого века мысль двух людей подошла к этого рода представлениям чрезвычайно широко и глубоко, совсем по разному, почти одновременно и вполне независимо.

Это были два величайшие экспериментатора прошлого века, стоявшие в стороне от математической обработки своих достижений: Михаил Фарадэй, никогда не принимавший идеи абсолютного пространства и такого же времени, искавший нового объяснения для всемирного притяжения, и Луи Пастер, едва ли когда в своей работе реально встречавшийся с последствиями построений Ньютона в связи с теорией тяготения.

Фарадэй представлял себе эфиром заполненное пространство проникнутым правильно распределенными, опытом выявляемыми, линиями сил. Он

придал пространству Ньютона определенное строение, очевидно, не объяснимое одной метрикой Эвклидова пространства. Для огромной области электрических и магнитных сил, охватывающей всю реальность, он выявил определенное строение, лежащее вне метрики пространства. Мы видим сейчас, как бьется научная мысль над сведением к одному математическому выражению Фарадэй-Максуэллова электромагнитного поля и Ньютонова поля тяготения. Еще не ясно, не есть ли это стремление — иллюзия.

Пастер вскрыл опытом и наблюдением не менее глубокое свойство пространства-времени. Образ времени здесь выступает резко и определенно, хотя он не привлекал исследовательскую мысль Пастера. Здесь на ряду с динамизмом неоднородного пространства выявляется новое его общее свойство — его анизотропность. Еще больше, Пастер указал на резко своеобразное свойство пространства, охваченного жизнью. Он нашел, что в этом пространстве отсутствует сложная симметрия, а простая симметрия определенным, закономерным образом нарушена — диссиметрична.

Почти через двадцать лет после Пастера Леонард Зонке, развивая идеи Габриэля Деляфосса, Морица Людвига Франкенгейма и Августа Бравэ, перенес в пространство представление об анизотропной его однородности в более общем выражении в математической обработке данных науки о кристаллах. Он перешел от кристаллических многогранников к безграничной однородности анизотропной среды из точек — к понятию анизотропной прерывчатой непрерывности. Павел Грот отождествил точки такой непрерывно-прерывчатой среды с атомами, Евграф Степанович Федоров и Артур Шенфлисс решили математическую задачу о таких пространственных анизотропных прерывчатых непрерывностях в общей форме. Пространственная решетка такой среды сейчас является основным орудием нашей эмпирической мысли в изучении состояния твердого вещества.

От нее сейчас перебрасывается мост в познание жидкостей, видится возможность подхода к газам: она начинает охватывать всю материю.

В сущности анизотропная непрерывность[1] есть пространство в новом отличном от других его геометрических выражений геометрическом понимании.

31. Так пространство физика оказывается заполненным, неоднородным, анизотропным. Дальнейшее углубление позволило еще конкретнее охватить пространство, еще дальше отойти от абсолютного пространства.

[1] Анизотропное пространство физика и кристаллографа прерывчато в смысле однородности, так как точки его заполняющие отличны от их окружения — но оно непрерывно в смысле протяжения, так как охватывает однородно все пространство, какие бы размеры оно не имело.

Две концепции исторически выделяются по своему значению.

В год смерти Фарадэя в 1867 г. Джемс Клерк Максуэлл дал первые основания математической обработки и углубления идей Фарадэя, непонятых современниками, о строении эфира в электромагнитных явлениях. В 1870-х гг. он дал математическое глубокое их развитие, но лишь через десяток-два лет после его смерти (в 1879 г.) — идеи Клерк Максуэлла охватили научную мысль — охватили целиком и глубоко. Они положили прочное основание понятию физических полей — математически выражаемых областей пространства, особого строения для разных физических явлений. Физическое поле сейчас охватывает всю мысль и работу физика. Поле тяготения стало рядом с полем электромагнитным, к которому Максуэлл свел явления света и электричества. Любопытно, что Максуэлл, подобно Ньютону и Фарадэю, совмещал и неразрывно связывал свою всеобъемлющую математически выраженную концепцию мира с искренним теологическим христианским исканием...

Через шесть лет после Максуэлла великий французский ученый Пьер Кюри математически расширил и обработал понятие диссиметрии Пастера. Он был менее счастлив, чем Максуэлл и не успел довести до конца своей работы. Случайность прервала его жизнь. Кюри выявил диссиметрию Пастера, как неоднородность пространства, выраженную в образах математически понятой симметрии. Он перенес ее на физические поля. Он ввел в пространство геометрии и в пространство реальности представление о его закономерной анизотропности, о существовании определенных состояний пространства. Понятие анизотропности глубже проникает в идею пространства, чем идея о заполнении и неоднородности пространства, так как это понятие закономерно геометрическое. Это геометрически выраженная неоднородность. Оно может быть распространено и на геометрическую метрику пространства. Кюри мог поэтому думать о состояниях пространства.[1]

32. Независимо шли и другие построения, менее всеобъемлющие, но углублявшие понимание пространства в широких областях эмпирического знания.

На трех из них необходимо остановить внимание.

Во-первых, Уильям Клиффорд, математик и философ, признавая вероятность реального существования многомерного пространства, поставил

[1] В печатаемой ныне в «Известиях» нашей Академии работе Алексея Васильевича Шубникова сделан дальнейший шаг: анизотропное кристаллическое пространство выявляется как одно из многих возможных анизотропных пространств.

более 50 лет тому назад проблему об особом **геометрическом строении** физического пространства, о кажущейся его трехмерности и кажущемся тождестве с Эвклидовым пространством; он связал пространство с веществом, являющимся проявлением геометрического строения пространства. Научная мысль идет по этому пути. Пространство Клиффорда ближе к пространству Декарта, чем к пространству Ньютона.

Христиан фон Эренфельс в Праге, ныне здравствующий психолог, на основе изучения психической жизни личности, указал на закономерное пространственное выявление в этой области явлений, долго стоявших вне научной работы. Он указал на необходимость признания определенных геометрических образов, структур для визуального пространства, для мелодии тонов и т. п. явлений, связанных с строением пространственно и временно выявляемого мыслительного аппарата. Эти представления о психических образах были ныне берлинским профессором Вольфгангом Келером распространены на явления зоопсихологии и физики. Они привели к новому научному выражению физического пространства и к созданию нового философского течения, изучающего законы мышления, к «философии образов».

Наконец, наш сочлен Николай Семенович Курнаков связал с пространством новой геометрии, с геометрическим строением пространства Клиффорда огромную область физико-химических и химических процессов — вещество в этом его выражении. В физикохимическом анализе и в равновесиях соединений атомов он пытается выявить свойства пространства, ими проникнутого. Физико-химические явления, атомы химических элементов проникают все физическое пространство. Явления геохимии могут быть ими в значительной доле охвачены.

33. Во всех этих проявлениях пространства неизбежно и неуклонно неразделимо проявляется и время.

Пространство пространства-времени XX века не есть Ньютоново абсолютное пространство, но многоликое физическое пространство, только что в главных своих образах мною указанное.

В геометрической реальности время выражается вектором, который, однако, в зависимости от геометрического или физического строения пространства может не быть прямой линией Эвклидова пространства.

Если в современной разработке указанных структур обычно на время не обращают внимания — совершенно ясно, что оно геометрически в них уже существует и может быть выявлено.

Я уже указывал, что неоднородность проявляется динамически, т. е. выявляется во времени, также очевидно устанавливается в ходе времени

анизотропность. В заполненном эфиром пространстве выявления проявляются в движении, т. е. во времени.

Рассматривать эти структуры, как неподвижные статистические равновесия — можно только в их устойчивом предельном состоянии — только в некоторых состояниях времени, в отдельные мгновения.

К этому пределу они приходят или вернее его проходят. И характер, определяющего их приход или проход времени в геометрическом выражении резко и определенно всегда полярный, однозначный.

34. В двух крупнейших физико-математических обобщениях, опирающихся глубочайшим образом на эмпирическую базу науки начала и конца XIX века, в пространстве-времени резко выявляется этот полярный характер времени.

С одной стороны, молодой французский инженер Сади Карно в 1824 г. положил начало термодинамике. Принцип Карно определяет однозначный ход процесса во времени. Через тридцать лет позже, тогда профессор в Цюрихе, Рудольф Юлий Клаузиус в принципе энтропии распространил этот однозначный процесс, выражающийся в пространстве-времени геометрически полярным вектором времени на всю реальность как определяющий «конец мира». В этой форме это есть экстраполяция логической мысли, но не явление реальности.

Еще через почти двадцать лет, в 1876—1878 гг. в крупнейшем и глубочайшем математически выраженном обобщении о неоднородных равновесиях, созданном профессором Йельского университета в НьюХэйвене в Коннектикуте Уиллярдом Гиббсом, через 15—20 лет, к концу XIX столетия, вошедшим в жизнь, огромная новая область явлений, в том числе, как мы теперь видим, и геохимических, была охвачена законами термодинамики; по новому охвачены и электродинамические явления. Ход процесса выражен во времени однозначным полярным вектором.

Время, пока устанавливается равновесие, может быть очень длительным и все же геометрически выражаться полярным вектором. Однако в законченном установившемся, идущем, процессе — в динамическом равновесии — это свойство времени исчезает. Равновесие выражается в обратимых процессах.

35. Тот же полярный характер времени резко и ярко сказывается в тех явлениях бренности атомов и бренности неделимых жизни, о которых я говорил в начале речи.

В обоих случаях мы имеем процессы, не сводимые к энтропии, в облике времени ей противуположные. Векторы энтропии и геохимической бренности

суть векторы противоположного направления и ясно разного характера. Я не могу здесь на этом останавливаться, но ясно, что так или иначе эта разница должна быть геометрически выражена.

Противопоставление проявления времени в энтропии и в явлениях жизни должно быть научно осознано. Энтропия многими признается самым основным обобщением, всепроникающим, отдельно стоящим. Ее понимание должно измениться с изменением понимания времени.

Вступая в область жизни, мы опять подходим к более глубокому, чем в других процессах природы, проникновению в реальность, к новому пониманию времени.

36. Бренность жизни нами переживается как время отличное от обычного времени физика. Это длительность — дление.

Ньютон пытался длительность связать с абсолютным временем. Сейчас же была показана Джоном Локком неразделимая связь длительности с умственным процессом и ошибочность отнесения длительности в ее основной части к абсолютному времени — времени механика.

В русском языке можно выделить эту durée Анри Бергсона, как дление, связанное не только с умственным процессом, но общее и вернее с процессом жизни, отдельным словом, для отличия от обычного времени физика, определяемого не реальным однозначным процессом, идущим в мир, а движением. Измерение этого движения в физике основано в конце концов на измерении периодичности — возвращении предмета к прежнему положению. Таково наше время астрономическое и время наших часов. Направление времени при таком подходе теряется из разсмотрения.

Дление характерно и ярко проявляется в нашем сознании, но его же мы повидимому логически правильно должны переносить и ко всему времени жизни и к бренности атома.[1]

Дление — бренность в ее проявлении — геометрически выражается полярным вектором, однозначным с временем энтропии, но от него отличным.

С исчезновением из нашего представления абсолютного времени Ньютона, дление приобретает в выражении времени огромное значение. Грань между психологическим и физическим временем стирается.

Великая загадка вчера-сегодня-завтра, непрерывно нас проникающая, пока мы живем, распространяется на всю природу. Пространство-время

[1] Этим определяется огромное и научное и философское значение того нового метода измерения времени, какое сейчас создается изучением явлений радиоактивности. В отличие от физического времени, методика измерения которого научно установлена Галилеем — мы измеряем здесь и приводим к физическому времени одно из проявлений дления. Это проявление космического реального дления. Я вернусь к этому в другом месте.

не есть стационарно абстрактное построение или явление. В нем есть вчера-сегодня-завтра. Оно все, как целое, этим вчера-сегодня-завтра всеобъемлюще проникнуто.

Возникают новые вопросы о времени, теснейшим образом связанные с длением. Полярные векторы, ему отвечающие, могут ли быть геометрически различны и вне сравнения с энтропией? Пастер указал, что в пространстве, в ряде явлений жизни, эти векторы должны быть энантиоморфны — правые или левые. Распространяется ли эта энантиоморфность, правое и левое свойство вектора, на полярные векторы времени? В чем она тогда выражается? Энантиоморфность выражена в мыслительном аппарате — в мозге. Она должна, вернее — может, выявляться и в эффекте — в длении.

6. Несколько замечаний о принципе симметрии и об эмпирическом мгновении

37. Научная мысль стоит на историческом переломе. Глубоко коснувшись основных понятий пространства и времени, обняв их по новому, она подошла к новому пониманию реальности — новому и в ширь и в глубь.

В здоровом, но бурном, движении научная мысль смещает установившееся веками понимание. Перед ней возникают новые проблемы и возникнут еще такие, о которых никогда научное творчество не помышляло.

Путь предстоит долгий, путь один — исконный путь науки: решение частных задач, связанных между собою для человеческой мысли аксиомой реальности мира.

Прежде чем кончить, я хочу остановить ваше внимание на двух больших проблемах, сейчас, мне кажется, выдвигаемых моментом дня.

Одна проблема старая, другая новая.

Одна из них — анизотропность пространства-времени. Как к ней подойти и как ее изучать?

Математически это возможно только симметрией.

Между тем учение о симметрии получило в науке неполное и отчасти одностороннее выражение и совершенно оставлено без внимания философской мыслью. В современном виде оно недостаточно для новой, стоящей перед нами задачи.

Учение о симметрии разработано главным образом минералогами и математиками. Для областей эмпирического знания — почти исключительно минералогами, в связи с изучением природных кристаллов, приведших в конце концов к гораздо более широкой области явлений — к изуче-

нию твердого состояния материи, в котором и анизотропность и симметрия выражены чрезвычайно ярко.

Изучающая это состояние наука, вся проникнутая учением о симметрии, кристаллография достигла стройности и глубины, не превзойденной другими областями точного знания.

Но в кристаллографии симметрия проявляется не во всей полноте. И это ясно давно указал, но не успел развить для других отделов физики Пьер Кюри.

Еще ярче это проявляется для наук биологических.

Здесь требуется новая работа мысли. Симметрия проявлений жизни была охвачена обобщающей мыслью гораздо менее, чем симметрия твердого вещества, хотя из нее исходил Бравэ, положивший основы симметрии кристаллов. Ярко видна особенность симметрии жизни хотя бы из одного факта. Ось симметрии 5-го порядка, неразрывно связанная с «золотым или божественным сечением», отражающимся в нашем осознании красоты, занимавшим мысль Леонардо де Винчи, Иоганна Кеплера и всех других к нему подходивших — эта ось, играющая заметную роль в морфологии форм жизни, в кристаллографии невозможна. И она в ней действительно отсутствует. А между тем именно эта пятерная симметрия играет видную роль и в геометрии — еще древней эллинской. Она определяет один из пяти многогранников, которым Платон и неопифагорейцы придавали огромное значение в строении мира.

Уже в нашем веке, сперва в Москве Юрий Викторович Вульф, потом в Гронингене Франс Мартинс Ёгер охватили в одном общем учении симметрию жизни и симметрию кристаллов. Но это начатки, не получившие должного развития. Морфологи биологи работают над симметрией вне учения о симметрии, его не зная или его не учитывая. Здесь быстро создается огромная область разрозненных новых и давно известных явлений. Эта область учением о симметрии не охвачена.

Необходима обработка учения о симметрии в тесной связи с морфологией жизни. Это и есть та новая огромная задача, которая сейчас стала на очереди. Я уже указывал, что в связи с этим стоит и проблема полярных векторов времени в энантиоморфной среде жизни.

38. Но для симметрии не проделана и другая работа. Вся область научного творчества, связанная с постройкой научных теорий, научных космогоний и научных гипотез, находится в теснейшей связи с философской мыслью. В ней неизбежен, для нее необходим философский анализ основных научных положений. Странным образом учение о симметрии оставлено без внимания

тысячелетней философской мыслью. Попытка, недавняя, связать это понятие с Лейбницевским принципом достаточного основания, впервые, кажется, сделанная философом и математиком Федерико Энрикэсом, явно не достаточно глубока. Она не охватывает, мне кажется, многих основных проявлений учения о симметрии. Направление сюда философского анализа является поэтому очередной задачей для тех философских систем, которые учитывают современную научную мысль. Оно необходимо для научного роста проблемы времени, ибо она всегда будет идти, как это ясно из всего сказанного, в связи с философской мыслью. Но анализ симметрии необходим и для философской мысли. Должен быть найден общий язык между философией и наукой. Ясно, что принцип симметрии, геометрический охват пространства-времени в науке будет играть основную роль. Его должна охватить и философия. Но что такое симметрия? Это задача прежде всего философского искания. Она должна быть ею поставлена.

39. Другая проблема — новая. Проблема эмпирического мгновения. Она уже не выходит из области времени, но она глубочайшим образом должна нас интересовать — больше того, она является сейчас научно и философски злободневной.

Мы переживаем сейчас в XX веке исторически небывалое углубление в понятие времени, аналогичное, но противоположное, тому, какое вошло в научную мысль в эпоху создания новой науки — в XVII столетии.

Тогда вошла в сознание человечества безграничность времени в его проявлении в Космосе; стали сознавать его возможную безначальность и бесконечность. Вчера отделяет мириады лет прошедшего; завтра начнет новые мириады будущего. Сегодня находится между ними.

Теперь мы подходим к такому же сознанию чрезвычайного богатства содержанием, реальным содержанием, доступным научному изучению, мельчайших мгновений. Есть вчера-сегодня-завтра — в мгновении.

Этим мы удаляемся не только от Ньютона или Эйлера, длительность мира — Космоса науки — для которых допускалась в пределах тысячелетий — но и от представлений научных мыслителей, отбросивших рамки философских или религиозных ограничений. Эти мыслители открыли путь понимания огромных мириад лет. На этом пути принимают сейчас во внимание в научных концепциях десятки квинтиллионов лет, которые например недавно Эдвин Геббль использовал в исчислениях при анализе межгалактической материи, материи вне нашего мирового острова.

40. Такая же бездна открывается сейчас в понимании мгновения. Для мгновения, для точки времени — Zeitpunkt Паладия — вскрывается реальное содержание, не менее богатое, чем то, которое нами сознается в безбрежности пространства-времени Космоса.

Реально это изменение представлений прежде всего ставит перед нами вопрос о правильности веками выработанной основной единицы измерения времени — секунды, связанной с равномерным движением, с линейным, а не с векториальным выражением времени.

В анализе мгновения мы входим в тот научный микроскопический разрез реальности, — бытия — который в новой физике привел нас сейчас к новому миропониманию, коренным образом меняющему основные положения научной и философской мысли. На явлениях, в этом разрезе проявляющихся, сейчас выявилась необходимость коренного изменения основных понятий механики.

В таком разрезе мира, единица пространства — сантиметр — может быть выдержала испытание научного опыта и наблюдения. Я говорю может быть, потому что возможно, что именно единица пространства, неправильно выбранная, обуславливает то колебание в стойкости логического закона причинности,[1] которое мы переживаем.

Для секунды начинает уже реально и ясно проявляться эта возможность.

В микроскопическом разрезе мира — одна гепталлионная сантиметра — мера протона — есть такая же реальность, наполненная содержанием, как десятибиллионная доля секунды, в течение которой атом полония, проходя через атом висмута, даст атом свинца. Каждый из этих атомов в этот ничтожный промежуток времени получает свое сложнейшее, резко различное строение, проявляет свои закономерные движения.[2]

В этом явлении микрокосмоса, для нашего сознания бездонного, мы подходим к длению нашей личности: сколько бессознательных и сознательных процессов переживает каждый из нас в ничтожную долю времени, в мгновение! Бывают мгновения в жизни каждого, когда это сознается явно и определенно.

[1] Вопрос о причинности, «детерминизма», сейчас поставленный в науке встретился с полной неподготовленностью к нему философской мысли. Причинность и детерминизм философских учений не охватывают детерминизма физиков.

[2] И в научном изучении времени мы подходим к гепталионным частям секунды, как подошли и в сантиметре. Время столкновения α-частицы с протоном измеряется 10^{-21} секунды, т. е. гексалионными долями секунды, на тысячи только раз меньше, чем подошли реально в измерении пространства.

Сантиметр и секунда, связанные с равномерным движением, колеблются в нашем сознании, как неизбежные и удобные меры времени пространства.[1]

Изменение в мере времени, мы переживаем ярче в явлениях физического мира.

Ибо отвечающее неподвижному, устойчивому, абстрактному понятию геометрического пространства, такое же понятие для времени — понятие неподвижной, абстрактной вечности — не вошло в Ньютоново представление и в науку. Время науки, жизни, построений Ньютона вечно подвижное. Только пространство реальности принял Ньютон неподвижным в его сущности.

Такое время, не измеримое секундой, отвечает нашему чувству дления.

Философ Георг Зиммель, один из духовных властителей современной Германии, недавно перед смертью ярко выразил это субъективное значение времени для мыслящей личности: «Время есть жизнь, если оставить в стороне ее содержание».

Почти без изменения это выражение может быть сейчас применено к научной реальности.

41. Новое огромного значения охватываемое наукой явление, тесно с этим связанное, сейчас перед нами реально открывается. Оно с новой стороны приводит нас к изменению в понимании единицы времени — секунды, только что наполнившейся для нас огромным содержанием. Оно началось, можно сказать, на этих днях, за последние два-три года. Оно изошло из точных эмпирических наблюдений астрономов.

И оно приводит нас к такому пониманию пространства-времени, в котором и пространство яснейшим образом перестает быть неподвижным пространством геометрии. Оно становится неустойчивым, динамическим, текучим пространством.

42. Начинает открываться новая картина мироздания. Видимое простым глазом звездное небо отвечает только нашему мировому острову, одному из миллионов миллионов таких же мировых островов, галаксий.

Все видимые простым глазом звезды, все видимое простым глазом звездное небо принадлежит к нашей галаксии.

Но телескоп проникает за ее пределы. В телескоп среди звезд видны бесчисленные рассеянные туманности, нашим звездам чуждые, чуждые нам мировые острова.

[1] И в сантиметре и в секунде не включено то свойство времени, которое выражается в природных явлениях в длении — его однозначность — полярность вектора при геометрическом выражении времени.

И вот мы видим, что эти мировые острова от нас разбегаются с непостижимой для нас, раньше негаданной для космических тел скоростью. Для самых дальних она превышает сейчас 20 000 км в секунду — $^1/_{15}$ часть скорости света (M. L. Humason, для туманности в созвездии Льва, 1931). Еще три года тому назад наибольшая известная скорость удаления была в 17—18 раз меньше. Мы знали эти скорости для материальных тел в микроскопическом разрезе мира: в радиоактивном распаде для α-частиц, заряженных атомов гелия.

Альфа-частицы RaC вылетают при разрушении его ядра с той же почти скоростью, равною $^1/_{16}$ скорости света. Они проходят небольшие пространства; быстро затормаживаются. Электроны движутся с еще большей скоростью. Но мыслить подобные скорости — скорости взрыва для огромных частей пространства, для космических систем наибольших мыслимых размеров — как обычное, основное проявление мироздания, казалось еще недавно невероятным.

Что это такое? Реальное явление? — действительно идущий рост мира? Его пульсация, как это математически и логически выводил за несколько лет до этих научных выявлений так рано ушедший от нас Александр Андреевич Фридман?

Или же это новое неизвестное нам проявление свойств не стационарного, но текучего пространства-времени, как высказывал одно время Артур Эддингтон? Или же следствие невозможности принятых единиц для меры просранства-времени — сантиметра и секунды?

Если это реальное явление — мир нам вскрывается, как неустойчивое, находящееся в несложившемся состоянии волнение. Мир взрывающийся, но возможно по аналогии с α-частицей, вновь приходящий в равновесие. Вскрывается ли перед нами тот мировой вихрь, который в XVII веке рисовался в гениальной философской интуиции Рене Декарту? вихрь, который был удален из нашего научного понимания Космоса системой мира Ньютона, стройной, до конца исчисляемой, устойчивой прочной системой, чем не была вихревая теория мироздания. В этой форме только и выявлялись для нас элементы вечного порядка. Стабильность этой системы, — причина ее — занимала более ста лет назад мысль Люи де Лапласа, строившего свою систему мира, долго, еще недавно, владевшую научной мыслью — и объяснения не получила.

Устойчивость системы мира Ньютона давно представлялась загадкой. Непрерывно открывались явления — на первый взгляд незначительные, ей противоречащие. Они реальны и мощны?

На наших глазах в два-три последних года, т. е. в мгновение, сейчас, начинает коренным образом меняться тысячелетнее научное мироздание. Изменение вносится не гипотетическими построениями фантазии или интуиции, не великой научно-философской концепцией, как мировые вихри Декарта, а точным эмпирическим научным наблюдением реальности, научными фактами.

43. Мы стоим на границе величайших изменений в познании мира, оставляющих далеко за собой эпоху создания новой науки в XVII веке.

В философской литературе довольно часто, а изредка и в научной, встречаются указания, что наука переживает кризис. Но в философской же литературе и обычно в научной есть другое представление о переживаемом моменте, как об эпохе не кризиса, но величайшего научного расцвета.

Этот научный перелом отражается и в понимании времени. Философы, сторонники Паладия, сравнивают вводимое им научно-философское понимание с тем великим освобождением человеческой личности от уз тогдашней, XVI века, религии и философии, какое было произведено спокойным мудрецом Фрауэнбургским каноником Николаем Коперником в год его смерти, в 1543 г., 388 лет назад.

Я думаю, что такое представление ближе отражает действительность, но и оно недостаточно сильно. Мы переживаем не кризис, волнующий слабые души, а величайший перелом научной мысли человечества, совершающийся лишь раз в тысячелетия, переживаем научные достижения, равных которым не видели долгие поколения наших предков. Может быть нечто подобное было в эпоху зарождения эллинской научной мысли, за 600 лет до начала нашей эры.

Стоя на этом переломе, охватывая взором раскрывающееся будущее — мы должны быть счастливы, что нам суждено это пережить, в создании такого будущего участвовать.

Мы только начинаем сознавать непреодолимую мощь свободной научной мысли, величайшей творческой силы Homo sapiens, человеческой свободной личности, величайшего нам известного проявления, ее космической силы, царство которой впереди. Оно этим переломом негаданно быстро к нам придвигается.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ПРОБЛЕМА ВРЕМЕНИ В ОСВЕЩЕНИИ АКАД. ВЕРНАДСКОГО

А. М. ДЕБОРИНА

В своем докладе акад. Вернадский затрагивает ряд интересных и животрепещущих вопросов. Для освещения проблемы времени он переворошил огромный материал. Однако, несмотря на это, у читателя остается после ознакомления с работой автора чувство глубокой неудовлетворенности. Объясняется это, нам кажется, прежде всего, излишним обилием затрагиваемых вопросов, что не дало автору возможности не только разрешить, но и формулировать их с достаточной точностью. Вторая основная особенность работы состоит в том, что проблема времени, вокруг которой автором мобилизованы всевозможные орудия защиты, осталась в конце концов слабо освещенной.

Во избежание особенно последнего упрека по нашему собственному адресу, позволим себе прежде всего оговориться, что в нашу задачу не входит разрешение поставленных автором вопросов. Мы считаем необходимым в этой статье ограничиться лишь несколькими критическими замечаниями принципиального характера.

Избранная акад. Вернадским тема «Проблема времени» чрезвычайно серьезная и ответственная. Она обязывает автора прежде всего к четкой философской установке. Что же можно сказать о философской установке автора? На этот вопрос должно ответить, что в философском отношении доклад представляет собою яркий пример эклектицизма.

В. И. Вернадский различает четыре формы знания: научную, философскую, религиозную и «народную мудрость». Чрезвычайно характерно, что религиозное знание ставится в один ряд с научным и философским знанием. С одинаковым правом можно было бы дополнить этот ряд оккуль-

тизмом и спиритизмом. Философия и наука в течение многих веков вели борьбу против веры, отстаивая права знания. В этой борьбе было пролито, между прочим, не мало живой человеческой крови.

«Вера, говорится в Новом завете, есть уповаемых извещение, вещей обличение невидимых». Религия имеет своим предметом сверхъестественные силы, в существование которых человек верит; он не только не нуждается ни в каких логических доказательствах, наблюдениях, фактах, экспериментах для утверждения своей веры, напротив того, религиозная вера, находится к научному знанию в принципиальном противоречии: Credo, quia absurdum — классическая формула теологии. Говорить о религиозном знании совершенно бессмысленно. Ставить теологию рядом с философией и наукой, видя в ней особую форму познания, значит дискредитировать основы научного знания. На Западе где еще жив «боженька» буржуазные ученые и философы прилагают много труда и стараний, чтобы укрепить его бытие, являющееся известной «гарантией» бытия классового общества.

Но и там мы имеем среди ученых и философов два лагеря: наиболее передовые элементы эмансипировались от теологии; реакционные же элементы отстаивают равноправность религиозного «знания» с научным знанием, заявляя при этом, что подлинная истина доступна только религиозной вере, что последняя является высшей формой познания. Когда мыслитель утверждает, что существуют три формы знания, то он не может ограничиться констатированием голого факта, а должен выяснить взаимоотношение этих различных форм познания.

Акад. Вернадский этого не делает, оставляя нас, таким образом, в полном недоумении насчет места, отводимого им религиозному «знанию» в системе человеческого знания вообще. Автор, правда, пытается отграничить научное познание от религиозного и философского знания. Но разграничение «сфер влияния» как раз предполагает признание правомерности религиозного «знания», отличающегося, скажем, иной структурой и иными особенностями, чем научное знание. Можно сказать, что научное познание скользит по поверхности бытия, в то время как религиозное знание проникает в самые глубины бытия. Ведь на такой точке зрения стоят, например, французские фидеисты, вроде Бутру, Леруа и др.

Наше недоумение насчет отношения акад. Вернадского к религиозному «знанию» возрастает, когда мы читаем в его докладе, что в Ньютоновском определении времени «отразились два искания жизненной правды, глубочайшим образом охватившие его великую личность. Он стремился выра-

зить время так, чтобы можно было точно вычислить и научно представлять систему мира — выразить время Галилея в форме, отвечающей духовному началу мира, сознанием существования которого была охвачена вся жизнь Ньютона». Далее, акад. Вернадский подчеркивает, что Ньютон всю жизнь сознательно провел в искании правды, которая для него не ограничивалась одной только научной истиной, что в его научных концепциях ярко отразилось его религиозное сознание, что одним из существеннейших составных элементов Ньютоновского понимания времени явилось «логически глубоко продуманное представление об едином боге-творце».

Автор пользуется случаем, далее, чтобы подчеркнуть, что и для Эйлера признание абсолютного времени было связано с его пониманием духовного начала мира. Подобно Ньютону и Эйлеру, на почве духовного начала стояли и Максуэлл и Фарадэй. «Любопытно», пишет акад. Вернадский, «что Максуэлл, подобно Ньютону и Фарадэю, совмещал, и неразрывно связывал свою всеобъемлющую математически выраженную концепцию с искренним теологическим христианским исканием...»

Стало быть, и концепция абсолютного времени и пространства, как она была формулирована Ньютоном, и концепция Фарадэя, не разделявшего взгляды относительно абсолютного пространства и времени, одинаково «совмещаются» и «неразрывно связываются» с признанием духовного начала мира. Что же, в конце концов, хочет этим сказать акад. Вернадский? Не то ли, что научное познание, отличаясь специфической структурой, не исключает религиозного «знания», подходящего к миру со своими средствами познания и открывающего при помощи логически глубоко продуманных представлений духовное начало мира?

Во всяком случае, изложение отличается крайней двусмысленностью, Мы не находим на протяжении всей работы акад. Вернадского ни слова критики «духовного начала мира», являющегося, по убеждению автора, составной частью соответствующих математических и физических концепций Ньютона и Фарадэя. Повидимому, он считает возможным совмещение духовного начала, представление о едином боге-творце и пр., с физическими и математическими концепциями.

Нельзя также согласиться и с тем пониманием значения и роли философии, которое мы встречаем у акад. Вернадского. Правда, ничего ясного, определенного и точного по этому вопросу мы у него не находим. Тем не менее, на основании отдельных его высказываний и утверждений можно легко составить себе известное представление о его понимании философии.

Он стремится и здесь к отграничению науки от философии. Но это разграничение опять-таки страдает двусмысленностью и неопределенностью.

С одной стороны, он против какой бы то ни было «интервенции» философии в области науки. С другой же стороны, он сам находится под влиянием философских концепций, действительно враждебных науке. Помимо этого, мы встречаемся у него с совершенно неправильным взглядом на историческое взаимоотношение науки и философии.

Прежде всего следует подчеркнуть, что акад. Вернадский не делает никакого различия между материалистической и идеалистической философией. Для него существует философия, как таковая. Но вместе с тем несомненно, что автор находится во власти идеализма. В. И. Вернадский нигде не дает определения философии. Поэтому трудно сказать, что он понимает под философией.

Основная особенность философии, в отличие ее от науки, состоит, по его мнению, в том, что она имеет дело с понятиями, подвергающимися чисто логическому анализу нашего мысленного аппарата. Философские построения поэтому неизбежно проникнуты личностью, т. е. субъективны и лишены общеобязательности.

Не делая различия между материализмом и идеализмом, всячески избегая, как полагается во всех приличных домах, самого термина материализма, автор не видит того простого факта, что материализм тем отличается от идеализма, что он не ограничивается одним логическим анализом своих понятий, а подвергает их исправлению и изменению в соответствии с опытом и наблюдением, учитывая всю совокупность результатов научной мысли.

Совершенно неправильным приходится признать даваемую акад. Вернадским характеристику научного знания. По его мнению, научное знание резко отличается от философского (и от признаваемого им религиозного знания) в двух отношениях. Во-первых, тем, что «значительная и все растущая его часть является бесспорной, общеобязательной для всех проявлений жизни, для каждого человека. Она аксиоматична для человеческого общества, ибо она логически обязательна для человеческого сознания». Во-вторых, научное знание отличается особой структурой значительной части своих понятий, как способом их получения, так и их мыслительным анализом.

Научное знание делится на две части: одна из них образует единый общеобязательный для всех времен и народов комплекс знаний и понятий. Эта часть охватывает «математическую мысль» и эмпирическую основу знания, т. е. эмпирические понятия, выраженные в фактах и обобщениях.

Другая часть знания состоит из научных гипотез, моделей, научных теорий, которые общеобязательностью не обладают, но которые необходимы и неизбежны, так как научная мысль без них не может обойтись. Эта часть научного знания преходяща, всегда неверна и двусмысленна.

К сожалению, эта характеристика научного знания также в значительной части неверна и двусмысленна. Чистейшей мистикой является утверждение, что значительная часть знания является общеобязательной для всех проявлений жизни, т. е. вплоть до Infusoria. Но столь же неверно это утверждение в отношении всех времен и народов, в отношении всякого человеческого сознания. Нам представляется эта точка зрения В. И. Вернадского настолько элементарно ошибочной, что считаем лишним в этой плоскости вести спор. Но если даже оставить в покое «все проявления жизни» и людей «всех времен и народов», а взять людей нашего времени, нашего современного общества, то окажется, что и в отношении их точка зрения общеобязательности терпит крушение. В классовом обществе отношение людей не только к общетеоретическим построениям, но и к тем эмпирическим обобщениям, какие имеет в виду акад. Вернадский определяется, их положением в системе материального производства, их классовым положением и сознанием. В классовом обществе нет человеческого сознания вообще, а есть конкретное классовое сознание людей.

Но акад. Вернадский не прав и в другом отношении. Он исходит из существования абсолютных истин. Ему представляется, что, так наз., математические и эмпирические обобщения обладают характером неизменности, чем и определяется их общеобязательность для любого сознания. Такое метафизически-статистическое понимание научного знания противоречит всем «эмпирическим» данным. «Тот, кто прилагает масштаб подлинной, неизменной окончательной истины в последней инстанции к познаниям, которые по природе вещей или должны будут в течение многих поколений оставаться относительными, лишь постепенно достигая завершения, или которые подобно космогонии, геологии, истории человечества — навсегда останутся незаконченными и неполными, в виду недостаточности исторического материала, — тот доказывает этим лишь свое собственное невежество и непонимание, если даже истинной подкладкой их не служит, как в данном случае, притязание на собственную непогрешимость.

Истина и заблуждение, как и все движущиеся в полярных противоположностях логические категории, имеют абсолютное значение только в крайне ограниченной области.[1]

[1] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг, изд. Института К. Маркса и Ф. Энгельса, 1928, стр. 82.

Взгляды Энгельса на соотношение между абсолютной и относительной истиной получили дальнейшее развитие в работах Ленина. Диалектический материализм не отвергает существования абсолютной, объективной истины и не застывает на чистом релятивизме, а признает относительность всех наших знаний в смысле исторической условности пределов приближения наших знаний к этой абсолютной, объективной истине. Материалистическая диалектика, которой не хватает нашим естествоиспытателям, дает единственно правильное разрешение вопроса о взаимоотношении абсолютной и относительной истины. Критерием же истины является практика.

Совершенно чуждо сознанию акад. Вернадского правильное представление о процессе познания. Объясняется это прежде всего незнакомством его с материалистической диалектикой. С его точки зрения на одной стороне существует абсолютная истина, а на другой абсолютное заблуждение. Отсюда и получается у него неправильное, метафизическое деление научного знания на две части: на «математическую мысль» и эмпирические обобщения, составляющие абсолютную истину и отличающиеся общеобязательностью, с одной стороны, и на научные гипотезы, теории, модели и пр., отличающиеся непрерывной изменчивостью и оказывающиеся всегда неверными и двусмысленными — с другой стороны. Такое матафизическое противопоставление абсолютно ложных научных теорий и гипотез абсолютно истинным эмпирическим обобщениям не выдерживает никакой критики. Следует, между прочим, отметить, что сам же В. И. Вернадский подчеркивает, что научные теории и гипотезы необходимы и неизбежны, так как без них научная мысль не может работать. Спрашивается, какая же от них польза, если они всегда неверны и двусмысленны? Очевидно, что автор не уяснил себе значения и роли научных теорий и гипотез, а равно и их связи с эмпирическими обобщениями.

Нас завело бы слишком далеко, если бы мы занялись здесь выяснением вопроса о связи между эмпирическими фактами, обобщениями, гипотезами и научными теориями, составляющими различные ступени в процессе познания. С точки зрения развития познания одинаково неверно утверждение, будто эмпирические обобщения дают абсолютную истину и будто научные теории составляют абсолютную ложь. И здесь приходится рассуждать диалектически. Одно переходит в другое. Наше познание никогда не является законченным и абсолютно готовым; из незнания, как говорит Ленин, возникает знание; из неполного, неточного знания постепенно развивается более полное и более точное знание.

Гипотеза является специфической формой развития науки и в частности естествознания. На известной ступени развития знания гипотеза превращается в научную теорию. Однако, как научная гипотеза, так и теория, будучи даже правильными, являются не абсолютно законченными истинами, а лишь известными приближениями к объективной действительности, раскрывающими все полнее и точнее ее природы, действующие в ней закономерности, которые дают человеку возможность практически ею овладеть.

Пренебрежение научными гипотезами и теориями неразрывно связано у акад. Вернадского с отстаиваемой им точкой зрения «ползучего эмпиризма». Он согласен, что гипотезы и теории необходимы и неизбежны, но он видит в них лишь удобные фикции, рабочие орудия, которые не содержат в себе ни грана истины. Энгельс убедительно показал, что презирающий всякую теорию, относящийся недоверчиво ко всякому мышлению эмпиризм — самый надежный путь от естествознания к мистицизму.

Страх перед теорией в современных условиях имеет и социально-классовые корни.

«Презрение к диалектике, пишет Энгельс, не остается безнаказанным. Сколько бы ни высказывать пренебрежения ко всякому теоретическому мышлению, все же без последнего невозможно связать между собою любых двух естественных фактов или же уразуметь существующую между ними связь.

При этом важно только одно: мыслят ли правильно или нет, — и пренебрежение к теории является, само собою разумеется, самым надежным способом мыслить натуралистически и, значит, неверно. Но наверное мышление, доведенное до конца, приводит неизбежно, по давно известному диалектическому закону, к противоречию со своим исходным пунктом. И, таким образом, эмпирическое презрение к диалектике наказывается тем, что некоторые из самых трезвых эмпириков становятся жертвой самого дикого из всех суеверий — современного спиритизма».[1]

Таким образом, акад. Вернадский дает неправильную картину структуры науки и взаимоотношения отдельных ее частей, оставаясь на почве «ползучего эмпиризма», открывающего двери мистицизму.

Считая невозможным останавливаться на ряде фактических ошибок, допущенных акад. Вернадским, в части, касающейся истории взаимоотношения философии и науки, перейдем к проблеме времени.

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы, 1930, стр. 83.

Прежде всего отметим, что и в трактовке этой проблемы акад. Вернадским мы сталкиваемся с целым рядом двусмысленных и неправильных формулировок. С самого же начала он заявляет о своем согласии «с новой философской мыслью», представляемой Анри Бергсоном, что время связано в нашем сознании с жизнью, что время — дление — жизнь — тождественны. По Бергсону длительность (la durée) составляет основу нашего существа, истинную субстанцию его. Мы лишены возможности подвергнуть здесь критике Бергсоновское понятие длительности, насквозь идеалистическое и метафизическое. Скажем лишь, что у Бергсона понятие длительности неразрывно связано со всей его метафизической системой. Отождествление жизни с временем ни на чем не основано, точно так же, как превращение времени, длительности в сущность, субстанцию жизни не выдерживает никакой критики.

У Бергсона длительность носит характер мистической реальности обладающей всемогуществом. Длительность есть чистейшая абстракция последовательного чередования моментов нашего сознания и вот эта абстракция «changement, sans rien qui change» превращается в реальность, в могучий фактор, творящий жизнь и в самую субстанцию жизни. Казалось бы, от ученого, признающего одни лишь эмпирические факты и обобщения, можно бы было ожидать более осторожного отношения к мистическим идеям, но тут лишний раз подтверждается замечание Энгельса, что чистый эмпиризм есть надежный путь к мистицизму. Характерно, что акад. Вернадский не счел даже нужным дать какой-нибудь анализ понятия длительности или подвергнуть рассмотрению эволюцию идеи времени или хотя бы посчитаться с различными теориями, существующими насчет идеи времени и ее возникновения. Он просто последовал без всякой критики за мистической теорией Бергсона.

При этом следует подчеркнуть, что в работе, посвященной им специально проблеме времени поразительно мало говорится о времени. В самом деле, мы узнаем о «закономерной бренности» всего существующего — идея, которая самой своей формулировкой должна внушить некий мистический ужас, повидимому, тем «слабым душам», которые говорят о современном кризисе буржуазной мысли. Мужественные души смело идут навстречу даже гибели мира, покоряясь неизбежности — amor fati! — и торжественно поют восторженный гимн науке, возвещающей о «бренности мира».

«Le vieillissement, c'est le fond du temps», говорит светским языком Пьер Жанэ.[1] Что в мире все преходяще, что все наличные формы подвер-

[1] Pierre Janet. L'Evolution de la mémoire et de la notion du temps, 1928.

жены возникновению, развитию и исчезновению, — эта идея является прочным достоянием современной научной мысли. И все же формулировка акад. Вернадского, если даже отвлечься от ее богословской терминологии, одностороння и, следовательно, неполна, неточна, неверна.

Ко времени подходили с разных сторон, рассматривая его то как силу сохраняющую, то как силу разрушающую, то как силу созидающую. Акад. Вернадский видит во времени великую разрушительную силу материи. Он характеризует время, длительность единственным свойством «бренности». Но совершенно неправильно утверждать, что в мире господствует одна лишь смерть. Все конечное подвержено смерти и поскольку речь идет о жизни индивида, мы говорим: жить — значит умирать. Но столь же справедлива мысль, что умирать — значит жить, хотя бы процесс жизни-«умирания» длился у одних индивидов часы, а у других — миллионы лет.

Энгельс поэтому правильно говорит, что смерть есть существенный момент жизни. Подчеркивать же только момент смерти, «бренности», как это делает В. И. Вернадский, значит видеть лишь одну сторону процесса. Это означает вместе с тем, как мы уже указали, рассматривать время только как некоторую разрушительную силу, не замечая того, что оно играет в то же время и созидательную роль. Во избежания недоразумения необходимо подчеркнуть, что время само по себе не есть вообще некая «сила», а лишь форма существования движущейся материи, объединяющая моменты сохранения, созидания и разрушения, поскольку речь идет об определенных конкретных, т. е. конечных формах материи.

Категория времени играет огромную роль в теории эволюции и в историческом понимании всех процессов в области природы и общества вообще. С того момента, как наука стала прочной ногой на почву историзма, на точку зрения теории развития, категория времени приобрела фундаментальное значение. Природа и общество нуждаются для своего творчества во времени. Они ничего не создают сразу; все создается в процессе исторического развития, в ходе времени. Поэтому странно рассматривать время только как форму разрушения вещества; оно является и формой созидания, творчества материи, как и формой сохранения.

Никакая теория эволюции, не может обойтить без такого понимания времени, которое не охватило бы моментов возникновения, сохранения, развития, созидания и разрушения, т. е. перехода одних форм в другие. Все в этом мире преходяще. Но преходяще, как в смысле исчезновения данной формы, так и в смысле «перехода» ее в другую форму. Поэтому и «бренность» есть не абсолютное, а лишь относительное понятие.

Принцип историзма проник в наше время даже в мир атомов. Оказалось, что и атомы подобно всему конечному подвержены процессу изменения, процессу возникновения и уничтожения, что лишний раз подтверждает правильность и истинность учения диалектического материализма. Поэтому проводимая В. И. Вернадским в его работе идея закономерной «бренности» атомов совершенно правильная.

Однако, задача науки не исчерпывается этим. Наряду со смертью в природе существует и жизнь. Атомы не только умирают, но и «рождаются». Процесс природы совершается в двух противоположных направлениях: одно погибает, другое возникает, рождается. Поэтому усиленное подчеркивание «бренности» всего сущего при игнорировании одновременного процесса обновления природы, рождения новых форм, может подать повод к неправильным выводам насчет «бренности мира» в целом, насчет «бренности» вещества, ибо жизнь, как таковая, с точки зрения В. И. Вернадского, вечна, составляя истинную субстанцию мира.

Если каждая отдельная форма существования материи преходяща, то вечно движущаяся материя с ее аттрибутами неразрушима. Учение о неразрушимости движения материи, говорит справедливо Энгельс, надо понимать не только в количественном, но и в качественном смысле. Материя сохраняет вечную способность превращаться в свойственные ей различные формы.

В. И. Вернадский утверждает, что вплоть до середины прошлого века наука вынуждена была считаться с представлением о времени, равным немногим тысячелетиям и что «в эти века правильное представление о длительности реальности было живо в философски и религиозно мощной среде индийского культурного центра». Таким образом для науки создалось тяжелое положение, ярко проявившееся «в глубоком трагизме, в каком пришлось жить и бороться с религией и философией многим поколениям ученых за свободу научного искания, за истину в научном ее выражении».

Совершенно непонятно, зачем нужно было совершать далекое путешествие в «философски и религиозно мощную среду индийского культурного центра» за поисками правильного представления о длительности реальности, когда действительно научные представления о длительности реальности были развиты уже в 1755 г., стало быть, задолго до середины прошлого века, в соседней с нами стране — в Пруссии. Поездка в Кенигсберг и дешевле и поучительнее.

В своей «Всеобщей естественной истории и теории неба» Кант посвятил специальную главу под названием «О творении во всем объеме его

бесконечности как в пространстве, так и во времени»[1] вопросу о длительности реальности. Кант оперирует там не несколькими тысячелетиями, а сотнями миллионов лет. О даже употребляет выражение «горы миллионов столетий». Мало того, он исходит из понятия бесконечного времени и пространства, поскольку речь идет о мире в целом. Но Кант вместе с тем не стоит и на точке зрения неизменности мира и населяющих его существ.

Он пишет: «Все, что конечно, что имеет начало и возникло, носит в себе признак своей ограниченной природы; оно должно исчезнуть и иметь конец. Длительность мироздания имеет в себе благодаря совершенству своего устройства постоянство, которое по нашим понятиям, приближается к бесконечной длительности. Быть может, тысячи, миллионы столетий их не уничтожат; однако, так как тленность, присущая конечным вещам (den endlichen Naturen), постоянно работает над их уничтожением, то вечность будет держать в себе все возможные периоды, чтобы путем постепенного обветшания приблизить, наконец, момент их уничтожения».[2]

Солнечная система Ньютона оставалась после первого толчка неизменной и вечной. Кант первый стал рассматривать ее как исторический процесс, совершающийся во времени. Идея неизменности природы составляла до того времени основу естествознания. «Природа, как говорит Энгельс, вообще не представлялась тогда чем-то исторически развивающимся, имеющим свою историю во времени. Интересовались только пространственной протяженностью; различные формы группировались не одна за другой, а одна подле другой, естественная история считалась чем то неизменным, вековечным, подобно эллиптическим орбитам планет».

Этому консервативному взгляду на природу Кант противопоставил историческое понимание ее. Некоторые зачатки исторического взгляда на природу и общество уже встречаются во французской материалистической философии XVIII столетия. Но только Кант создал целостную научную теорию происхождения и уничтожения солнечной системы. Гегель создал всеобъемлющую теорию развития на идеалистической основе, которая, однако, дала мощный толчок научной мысли; но в отношении природы и он оставался на почве неизменности ее. В сороковых же годах прошлого года Маркс и Энгельс создали всеобъемлющую и всестороннюю теорию развития на материалистической основе.

[1] «Von der Schöpfung im ganzen Umfange ihrer Unendlichkeit, sowohl dem Raume als der Zeit nach», Siebentes Hauptstück.

[2] Immanuel Kant. Sämtliche Werke hg. von Karl Vorländer, 3. Aufl., 7. Bd., S. 128

По убеждению В. И. Вернадского, научная мысль встречала на пути своего развития враждебное отношение со стороны философии и поэтому она оставалась до середины XIX в. на позициях статического понимания природы.

Дело, как мы видим, обстоит совсем не так. Философско-теоретическая мысль во многом шла впереди естествознания. Следует, между прочим, отметить, что В. И. Вернадскому чуждо историческое понимание развития научного знания. Как, в самом деле научная мысль могла сама по себе притти к новому пониманию длительности реальности, когда палеонтология, геология и органическая химия еще только нарождалась?

Помимо этого, общественные условия до конца XVIII и начала XIX в. не могли благоприятствовать развитию исторического взгляда на природу. Необходимо было предварительно разрушить феодальный строй и нанести смертельный удар религии и церкви, чтобы стало возможно перейти от пространственной точки зрения к исторически-временной. Французская революция в этом отношении и составляет исторический рубеж, подобно тому, как Октябрьская революция 1917 г. составляет второй рубеж еще более высокого всемирно-исторического порядка и значения.

Революционная смена исторических форм, разрушение феодализма и неудержимый рост производительных сил в рамках новой социально-экономической формации обусловили развитие новых научных дисциплин, философской и исторической мысли. Кант, а за ним Лаплас, раздвинули рамки космического времени до бесконечности, принимая в то же время огромный, хотя и конечный, период времени для нашей солнечной системы. Позже Ляйелль раздвинул рамки геологического времени, а Дарвин — эволюционного, т. е. биологического времени.

В нашу эпоху необычайных успехов в области атомистической физики понятия физического времени получает свое дальнейшее развитие и углубление. Одновременно необычайно раздвинулись рамки исторического, т. е. человеческого, социального времени. На основе всех этих достижений науки и философии и могли сложиться новые представления о длительности реальности и новое понятие времени-пространства.

Анти-исторический взгляд В. И. Вернадского приводит его к тому представлению, что, с одной стороны, существовала научная мысль, плавно развивающаяся и обладающая правильными, истинными понятиями, а с другой стороны, философия (религию мы оставим в стороне), которая мешает своим вторжением в науку ее плавному развитию. Многим поколениям ученых, как он выражается, пришлось даже вести жестокую борьбу с филосо-

фией «за свободу научного искания, за истину в научном ее выражении». Мы показали, что этот «исторический» экскурс противоречит фактам. Мало того, основные, общие идеи естествознания были впервые формулированы философией, в то время как естествоиспытатели долго их не признавали.

Сам В. И. Вернадский вынужден признать, что «длительность-безграничность времени была ярко выражена в натурфилософских концепциях, Джиордана Бруно, проникших в науку». Такие явно противоречивые утверждения не способны внести ясность в понимание взаимоотношения науки и философии. А ссылки «на философски и религиозно мощную среду индийского культурного центра» только затемняют и запутывают дело.

Ошибочные взгляды акад. Вернадского увенчиваются следующими заявлениями: «Научная мысль расчистила поле своей работы, вернулась к исходным достижениям эллинской науки, быстро двинулась дальше, когда геологические науки в XIX в. заставили и религию и философию силой логики и жизненных приложений склониться перед научным фактом и переделать свои построения».

Это заявление столь же ошибочно, как и другие, уже нами приведенные. Новым является здесь открытие, что религия склонилась перед научным фактом и переделала свои построения в соответствии с научной мыслью... Если это так, то можно быть вполне спокойным и за судьбы науки, за судьбы религии. Между ними заключен тесный и прочный союз.

В. И. Вернадский в своем построении исходит из верной, материалистической предпосылки, когда он пишет, что «в основе научного знания стоит проникающее всю сущность науки аксиома — сознание реальности объектов изучения, сознание реальности мира». Точно также совершенно правильно В. И. Вернадский видит в пространстве и времени объективные реальности, «основные проявления вещества». Это все материалистические положения, хотя В. И. Вернадский и избегает называть вещи своими именами и не без достаточного основания, так как он себя материалистом не считает, и совершенно справедливо не считает.

Достаточно ознакомиться несколько ближе с его взглядами на время и пространство, чтобы читателя постигло и здесь жестокое разочарование. Прежде всего неудовлетворительно его определение времени, как «содержания вещества». Время, как и пространство, есть форма существования движущейся материи. К этому вопросу мы, впрочем, вернемся ниже.

Второе, анализ времени и пространства у него оторван от движения и материи. Отсюда получается ряд ошибочных формулировок и положений, вплоть до допущения пустого «дырявого» пространства и «дырявого»

времени, что, в свою очередь, ведет к мистическим выводам. Чтобы не быть голословным, приведем следующее место из его работы: «в науке, пишет он, впервые научно прочно стал вопрос: охватывает ли пространство-время всю научную реальность? Или могут быть научно охвачены и есть явления вне времени и вне пространства? В квантах мы имеем уже дело с такого рода научными представлениями».

Считать существование явлений вне времени и пространства «научным представлением» можно разве лишь с точки зрения спиритизма. Б. Рёссель прямо заявляет в своей книге «Analysis of Matter» что новое понимание физического детерминизма (или вернее, индетерминизма *А. Д.*), при котором электрон как бы наделяется «свободной волей» и кванты существуют вне времени и пространства, есть лишь спекулятивная возможность, но оно ставит предел «догматическому материализму». Таким образом, материалистические элементы в научном мировоззрении В. И. Вернадского совмещаются с анти-научными, мистическими элементами.

Переходя, далее, к вопросу о единстве времени-пространства, В. И. Вернадский правильно указывает, что в наше время это понятие было научно формулировано до Минковского Мельхиором Паладем в 1901 г. в его «Новой теории пространства и времени».[1] Но он отказывается от анализа двух резко различных пониманий единства времени-пространства, как они формулированы Паладем, с одной стороны, и Минковским-Эйнштейном, с другой. А между тем это различие в понимании проблемы представляет большой научный интерес.

Это различие сводится прежде всего к тому, что в то время как Минковский в своей знаменитой речи «Raum und Zeit» заявил, что время и пространство, взятые сами по себе, представляют собою лишь тени,[2] Паладь рассматривает их как полярные противоположности, сохраняющие, несмотря на единство, свои специфические особенности и свойства. По нашему мнению, это различие имеет фундаментальное значение. Ибо в толковании Минковского и многих последователей Эйнштейна мир принимает форму какого-то неподвижного четырехмерного континуума, где время становится как бы четвертым измерением пространства. Это воззрение, пишет напр., Карнап, имеет то преимущество, что на место текучего, вечно меняющегося образования, мы получаем однократное, прочное, неизменное образование, застывшее состояние которого мы изучаем.

[1] Перепечатана в его книге: Zur Weltmechanik, 1925.

[2] «Von Stand an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren».

Законы природы становятся здесь высказываниями о взаимной зависимости свойств частей четырехмерного образования.[1] При таком понимании мира исчезает его процессуальный, текучий, изменчивый характер. Поэтому нам представляется более близким к истине взгляд Паладя на время-пространство, выраженный им в след. формуле: «Der Zeitpunkt ist der Weltraum, der Raumpunkt ist der Zeitstrom», где время проникает, так сказать, каждую точку пространства, а каждая точка пространства образует течение времени. При таком подходе он и мог выдвинуть проблему «текучего пространства» в противоположность «стоячему пространству».

Если верно, что время и пространство в реальном мире не могут быть друг от друга отделены, то столь же верно, что они не могут быть отделены и от материи. Огромным достижением современной науки надо признать тот факт, что она стала рассматривать время и пространство не изолированно от материи, как это обычно делалось до Эйнштейна, а в связи с материей, ибо нет времени и пространства, «свободных» от материи.

Любопытно, что правильные в основе научные положения относительно связи пространства и времени с материей и ее движением выдвинул не кто иной, как Гегель. У него же мы находим и новое понятие единства времени и пространства. Его точку зрения принял и Энгельс.[2] От него же, по нашему мнению, исходит и Паладь. Время и пространство, говорит Гегель, наполнены материей. Они составляют ее формы. Подобно тому как нет движения без материи, так нет материи без движения. Движение есть процесс, переход от пространства во времени и наоборот.[3] Сущность движения есть непосредственное единство времени и пространства. Движение есть реально существующее благодаря пространству время, или истинно различенное благодаря времени пространство.

Только в движении время и пространство имеют действительность. В главе «Пространство и время» Гегель развертывает глубокий диалектический анализ единства и различия этих понятий. Что такое время, согласно гегелевской философии? Оно есть процесс действительных вещей, говорит он. Если бы в мире все было неизменно, если бы в нем господствовал абсолютный покой, то не было бы времени. Конечные вещи временны, потому что они подвержены изменениям. Их длительность относительна. Вечность есть бесконечная длительность. Конечные же вещи

[1] Rudolf Carnap. Physikalische Begriffsbildung, 1926, S. 56.
[2] См. Ф. Энгельс. Диалектика природы, стр. 13—14.
[3] Hegel. Sämtliche Werke, herausg. von Glockner, 9. Bd., S. 93.

обладают относительной длительностью, поскольку здесь длительность есть относительное «снятие» времени.[1]

ространство и время образуют противоположности, но они вместе с тем взаимно связаны, едины. Их единство реализуется в движении, представляющем переход одного в другое. «Здесь» есть не только пространственное определение, но и временное; оно выражает настоящее, которое непосредственно себя снимает. «Здесь» есть вместе с тем и «теперь» ибо оно представляет собою точку длительности. Единство «здесь» и «теперь» есть место. Оно соответствует тому, что Паладь передает понятием «Jetztraum».

Словом, идея единства времени и пространства впервые была развита в начале прошлого века Гегелем, но, к сожалению, не получила дальнейшего развития в естествознании. Преимущество гегелевской точки зрения состоит в том, что она дает диалектический анализ времени и пространства, не стирая грани между этими противоположностями, как это имеет место у Минковского и у многих последователей теории относительности, стремящихся рассматривать мир, как неподвижную, застывшую систему.

Паладь идет в основном по пути, указанному Гегелем, приближаясь в то же время к диалектическому материализму. Одной из важнейших задач современной науки, вступившей на путь изучения времени и пространства, говорит правильно акад. Вернадский, является выяснение вопроса о том, какую именно форму следует придать пространству-времени. Мы убеждены, что и в этом отношении реальную помощь естествоиспытателю может оказать только диалектический материализм, исключающий существование каких бы то ни было явлений вне времени и пространства и рассматривающий время и пространство, как единство двух противоположных форм существования движущейся материи.

К сожалению, акад. Вернадский в своем анализе времени исходит из ошибочных предпосылок идеалистической философии Бергсона. «В русском языке», пишет он, «можно выделить эту durée Анри Бергсона, как дление, связанное с умственным процессом, с жизнью, с отдельным словом.

[1] «Die Dauer ist das Allgemeine dieses Jetzts und jenes Jetzts, das Angehobensein dieses Prozesses der Dinge, die nicht dauern. Dauern Dinge auch, so vergeht die Zeit doch und ruht nicht; hier erscheint die Zeit als unabhängig und unterschieden von den Dingen. Sagen wir aber die Zeit vergeht doch, wenn auch Dinge dauern, so heisst das nur: wenn auch einige Dinge dauern, so erscheint doch Veränderung an andern Dingen, z. B. im Laufe der Sonne; und so sind die Dinge doch in der Zeit. Die allmählige Veränderung ist dann die leichte seidite Zuflucht, und den Dingen doch Ruhe und Dauer zuschreiben zu können» (Hegel, Sämtliche Werke, 9. Bd. S. 81).

Оно характерно и ярко проявляется в нашем сознании, — но его же мы, повидимому, логически правильно должны переносить и ко всему времени жизни и к бренности атома».

Мы имеем здесь дело с чрезвычайно туманными, неточными и двусмысленными представлениями. Если дление связано с сознанием и жизнью и если мы «логически правильно» должны перенести его на все время жизни и «бренности» атома, то атом, повидимому, наделяется сознанием, жизнью и даже речью («словом»). Следует подчеркнуть, что эти идеи акад. Вернадского вполне согласуются с его мистическим пониманием космоса и учением о всеобщем витализме. Если элементы космоса имеют глубокие аналогии с организмом, с жизнью, как он утверждает в другом месте, если в области изучения физических явлений необходимо проникновение основных явлений жизни, то отсюда легко дойти до наделения космоса жизнью и сознанием.

Отождествление длительности с жизнью ведет к утверждению мистической идеи о том, что где существует длительность, время, там мы имеем дело с жизнью и сознанием. Таким образом, «грань между психологическим и физическим временем стирается», как говорит В. И. Вернадский. И новое понятие времени-пространства используется им прежде всего для обоснования его мистических представлений о мире. Заявив торжественно, что наука базируется на идее реальности мира, «сторонами», «частями» которого являются время и пространство, он в результате приходит к признанию того, что время является тождественным с сознанием, что оно есть внутреннее содержание жизни и атома.

Таким образом, аннулируются те материалистические элементы его мировоззрения, на которые мы указали выше. Длительность, жизнь есть сущность мира, его субстанция. А вещество, о котором говорит В. И. Вернадский превращается лишь во внешнюю скорлупу, оболочку этой сущности. Жизнь-длительность постоянно подтачивает существование оболочки, изнашивает ее и, наконец, отбрасывает. Но жизнь сама по себе вечна. С другой стороны, не вся реальность мира, как мы видели, охватывается временем и пространством; есть явления, существующие вне времени и пространства, т. е. некий потусторонний мир, охватываемый какими-то иными средствами познания. Таким образом, реальность мира распадается на две части: на явления, охватываемые временем и пространством и на явления существующие вне времени и пространства, познаваемые, повидимому, посредством мистического созерцания или иными сверхъестественными путями.

При исследовании проблемы времени перед нами возникают три основных вопроса: 1) что представляет собою время в объективном мире? 2) каким

образом идея времени возникла и развилась у человека? и 3) каково отношение между объективным временем и нашими субъективными представлениями и понятиями времени? Акад. Вернадский этих вопросов себе даже и не ставит, так как он исходит из догматического тезиса, что время, длительность тождественны с сознанием и жизнью. Но нет ничего более ошибочного, чем это догматическое положение.

Не только растительный мир, но и низшие породы животных представления о времени не имеют. Можно допустить, что чувство времени присуще высшим представителям животного царства и в особенности тем из них, которые живут в общении с человеком. Каково бы ни было чувство или восприятие времени у животных, оно носит пространственный характер. Что касается первобытного человека, то его представление о времени резко отличается от нашего представления. «Представление, которое мы имеем о времени, кажется нам прирожденным свойством человеческого сознания, пишет Леви-Брюль. Это, однако, иллюзия. Эта идея времени почти не существует для первобытного мышления, которое усматривает непосредственно причинную связь между данным явлением и внепространственной силой».[1]

Мир первобытного человека конечен и замкнут. «Пространство здесь скорее чувствуется, чем осознается: направления его обременены качествами и свойствами. Каждая часть пространства сопричастна всему, что в ней обычно находится. Представление о времени, которое носит, главным образом, качественный характер, остается смутным: почти все первобытные языки настолько же бедны средствами для выражения временных отношений, насколько они богаты в выражении пространственных отношений».[2]

Первоначально у первобытного человека как, впрочем, и у ребенка имеется диффузное восприятие времени и пространства. Это восприятие характеризуется нерасчлененностью, в которой смешаны элементы времени и пространства. Из этого диффузного состояния развивается прежде всего представление пространства, понятие сосуществования. Всякая ориентировка во времени предполагает ориентировку в пространстве.[3] Это подтверждается и лингвистикой. Наречия времени, пишет Брюль, все произошли от наречий места. Отношения времени выражаются в языках первобытных народов пространственными выражениями. До какой степени пространственные и временные представления сначала смешаны и безразличны и как из этого смешения выде-

[1] Леви-Брюль. Первобытное мышление, стр. 285.

[2] Леви-Брюль, op. cit., стр. 300.

[3] Ernst Cassirer. Philosopie der symbloliscben Formen, II. Teil, S. 135; Guyau, La genèse de l'idée du temps, 1889—1890; Л. Брюль, op. cit. и др.

ляются сначала отчетливые пространственные идеи, а из них уже идея времени доказывает тот факт, что наречия места употребляются вначале безразлично и в смысле времени, как напр., «здесь» тождественно с «теперь», а «там» означает также раньше или позже.[1]

Первоначальное простое различие между «здесь» и «там», между близким и далеким одинаково характерно для выражения пространственных и временных отношений. Все обозначения пространственных форм мыслятся конкретно, как связанные с определенным вещественным содержанием. То же самое относится и к формам временных отношений. Для возникновения отвлеченных идей пространства и времени требуется долгий путь развития.

Из представления сосуществования постепенно развивается представление последовательности, т. е. течения времени. Представление бытия переходит в представление события, бывания, становления. Возникновение представления пространства уже у животного возникает из движения, совершаемого им в различных направлениях, чтобы удовлетворить свои потребности.[2] Между двумя точками пространства, между «здесь» и «там» существует разрыв, известное расстояние, которое включает в себе и временное отношение, постепенно развивающееся в более отчетливую идею времени.

Сначала время является расстоянием, промежутком между потребностью и удовлетворением, расстоянием «между чашей и губами», как выражается Гюйо. Три измерения времени — настоящее, прошедшее и будущее — в первобытном мышлении сначала не расчленены. И только в результате деятельности и движения, осуществляющего эту деятельность идея времени дифференцируется на составные его элементы. Движение в пространстве создает в процессе деятельного, активного приспособления человека к среде идею времени в нашем как и в животном сознании, поскольку оно ею обладает.

Понятие настоящего связано с понятием бытия, с понятием действительности, наличного существования. Прошедшее есть то, что находится позади нас, а будущее — то, что находится впереди нас. «Настоящий момент, говорит Гюйо, является, очевидно, исходной точкой во всяком представлении времени. Мы можем постигнуть время только с точки зрения настоящего, представляя себе прошедшее позади его, а будущее впереди. Но в этой точке зрения всегда выражается какое-нибудь событие, которое

[1] Ernst Cassirer. Philosophie der symbolischen Formen, I. Teil, S. 168.

[2] М. Гюйо. Происхождение идеи времени, русск. пер., стр. 23.

произошло в материальной и протяженной среде. Даже наше представление времени, наше изображение его имеет пространственную форму.

Пространство, которое мы видим, находится впереди нас; пространство, которого мы не видим, а которое только представляем себе, находится позади нас... То же самое нужно сказать о времени; мы можем изобразить себе прошедшее только как перспективу позади нас и будущее, вырастающее из настоящего, как перспективу впереди нас».[1] Эти совершенно правильные соображения доказывают, как внутреннюю связь между временем и пространством, так и эволюцию в нашем сознании идею времени из идеи пространства, или, вернее, из идеи движения в пространстве.

Расстояние между различными точками пространства может быть преодолено посредством движения, представляя собою одновременно пространственное и временное понятие. Для совершения движения между двумя точками требуется преодоление отделяющего их расстояния как времени, так и в пространстве. Понятие расстояния выражает расстояние пространства и расстояние времени, так что мы с полным правом говорим, что Ленинград находится на расстоянии двенадцати часов езды по железной дороге от Москвы. Время является мерой количества движения, работы, усилий, необходимых для преодоления пространства между Ленинградом и Москвой. Стало быть, в основе наших понятий времени и пространства лежит вообще движущаяся материя.

Нет никакого сомнения, что в развитии идеи времени у человека играла огромную, может быть, решающую роль трудовая деятельность его, и изменение наших представлений о времени (как и о пространстве) находилось в зависимости от развития производительных сил и общественных отношений. Подробнее здесь останавливаться на этом вопросе нет возможности.

Что же касается возникновения идеи времени у человека, то нам кажется, что Гюйо близок к истине, когда он указывает, что сначала время есть промежуток «между чашей и губами», т. е. промежуток или расстояние между потребностями и удовлетворением. Этот промежуток заполняется рядом усилий, труда, различных движений, необходимых для достижения цели. «Сначала будущее есть то, что должно быть, то, чего я не имею, в чем нуждаюсь и чего желаю, говорить Гюйо; оно есть то, чем я стремлюсь обладать; как настоящее сводится к сознательной деятельности, в самой себе черпающей наслаждение, так будущее сводится к деятельности, направляю-

[1] М. Гюйо. Происхождение идеи времени, стр. 54. В работе Гюйо есть ряд очень интересных и правильных мыслей. Но, к сожалению, автор стоит на почве агностицизма, каковое обстоятельство не могло не отразиться и на его анализе времени.

щейся к другой какой-либо вещи, ищущей того, чего ей недостает. Когда дитя голодно, оно плачет и протягивает руки к своей кормилице: вот зародыш идеи будущего. Всякая потребность предполагает возможность ее удовлетворения; совокупность таких возможностей мы обозначаем термином будущее.

Время закрыло бы доступ к себе существу, которое ничего не желало бы, ни к чему не стремилось бы. Мы протягиваем руку, и перед нами раскрывается пространство, которое наш неподвижный взор не мог бы уловить во всей последовательности его плоскостного расположения и множественности его измерений. То же относительно времени: нужно желать, нужно хотеть, нужно протянуть руку и итти вперед, чтобы создать будущее. Будущее есть не то, что идет к нам, но то, к чему мы идем».[1]

Все понятия человека являются отражениями объективной действительности и имеют своим источником практическую его деятельность. Это относится к самым абстрактным понятиям, как время, пространство, причинность, число и проч. К тому, что было приведено из Гюйо, можно прибавить еще очень много. Пространство, напр., возникает, повидимому, из сознания движения членов человеческого тела и из его перемещения. Понятие движения и становления возникло из деятельности, выражающейся в верчении.[2] В подтверждение этой мысли Кассирер приводит доказательства из области лингвистики. То же самое, если не в большей еще степени, относится к понятию времени, которое в особенности тесно связано с человеческой деятельностью, ибо время сводится к необходимым изменениям в пространстве или в вещах, к ритмическим движениям человеческой руки, или орудий в процессе труда.

Так как время есть мера количества усилий, движений, напряжений, труда, то ясно, что эволюция идеи времени у человека теснейшим образом связана с его деятельностью, которая выражается в последовательном чередований, усилий и движений. Вместе с понятием временной последовательности развивается идея причинности, опять-таки имеющая своим источником человеческую деятельность. Только в результате длительной эволюции человек приходит от конкретных представлений идей пространства, времени, причинности и пр., к абстрактным понятиям.

[1] М. Гюйо. Происхождение идеи времени, стр. 35.

[2] «Und wild sich der Ausdruck des Seins an die Vorstellung der örtlichen Beharrung der Ruhe anlehnt, so lehnt sich umgekehrt der Ausdruck des Werdens an die Vorstellung der Bewegung an: die Anschauung des Werdens wird aus der des Drehens, sich wendens entwickelt» (E. Cassirer, Philosophie der symbolischen Formen, I. Teil, S. 292).

До сих пор речь шла преимущественно об условиях возникновения и развития указанных идей в человеческом сознании. Но эти идеи в нашем сознании являются отражениями объективной действительности, приближениями к ней. В реальном, материальном мире материя, движение, время и пространство образуют единое целое. Только в мысли мы можем абстрагировать те или другие стороны реальности и аналитически их рассматривать отдельно, но это только известный прием исследования и изучения предмета. Однако, всякая отдельная сторона, реальности, взятая изолированно, в отрыве от других, от целого, дает только частичное, отрывочное знание. Современная наука переходит постепенно от аналитического к синтетическому пониманию и изучению реальности.

Ныне отдают себе уже отчет в том, что пространство и время составляют одно целое с движущейся материей. Время неразрывно связано с пространством, образуя единство. Если пространство выражает преимущественно внеположность, сосуществование материи, то время — последовательность ее изменений. В общей форме время есть абстракция движения, абстрактная форма изменения материи в пространстве. Поэтому совершенно невозможно иметь какие-либо правильные представления о времени, если игнорировать пространство. Точка зрения Бергсона, которая разделяется В. И. Вернадским, сводится к утверждению, что пространство — ничто, материя — тело без жизни. Время же есть сама жизнь, душа вещей и, следовательно, единственно достойный объект изучения.

Из всего сказанного видно, до какой степени ошибочна точка зрения Бергсона. Время само есть в значительной степени пространственное понятие, как пространство — временное понятие. Понятие сосуществования содержит в себе понятие одновременности. Понятие же времени нельзя себе конкретно мыслить без пространственных образов. Реально же, в объективной действительности нет времени без пространства и без движущейся материи.

Одинаково неправильным является то представление единства понятия-времени, при котором пространство пожирает время, как и то, при котором время пожирает пространство.

Новое учение о единстве времени и пространства, являющееся более высокой ступенью приближений наших понятий к объективной реальности, стало проникать в научное знание только за последние годы. Время и пространство стали специальными объектами научного исследования. Этому повороту способствовало развитие историзма, проникновение исторического взгляда даже в природу атома. Статическое понимание природы сменилось динамическим и историческим ее пониманием. В этом отношении решаю-

щее значение имело прежде всего развитие общественных отношений, толкавшее нашу мысль в сторону исторического осмысливания всех процессов, происходящих в природе и в человеческом обществе. Естественно, что на известной ступени развития стало необходимым объединить пространственное понимание реальности с временным ее пониманием. Отсюда и возникло в науке понятие единства времени и пространства. Не случайно, что первую формулировку этого понятия в новейшее время мы находим у Гегеля.

С другой стороны, колоссальное развитие производительных сил в нашу эпоху ставит чрезвычайно остро вопрос об овладении временем и пространством. Овладеть техникой значит, между прочим, также и овладеть временем и пространством. Для нашего социалистического строительства эта проблема имеет огромное значение. Лозунг нашей партии «догнать и перегнать в технико-экономическом отношении передовые страны» означает пройти известное расстояние, для преодоления которого иным странам нужно было иметь время в 50—100 лет, в возможно кратчайший срок, — в 10 лет.

В связи с этим понятны роль и значение высоких темпов в нашем социалистическом строительстве. «Быстрый темп развития индустрии», говорит тов. Сталин, «представляет основное начало и ключ преобразования всего нашего народного хозяйства на базе социалистического развития».[1] В своем политическом отчете на XVI съезде партии тов. Сталин отмечая, что нельзя смешивать темп развития промышленности с уровнем ее развития, говорит дальше: «мы дьявольски отстали в смысле уровня развития нашей промышленности от передовых капиталистических стран; только дальнейшее ускорение темпа развития нашей промышленности даст нам возможность догнать и перегнать в технико-экономическом отношении передовые капиталистические страны».[2]

Быстрые и ускоренные темпы нам необходимы для устранения противоречия между нашим наиболее передовым общественно-политическим строем и чрезмерно отсталой техникой и промышленностью. В первом отношении мы ушли далеко в будущее, во втором мы отстаем, т. е. находимся в прошлом. «Думаете ли вы», говорит тов. Сталин, «что можно добиться окончательной победы социализма при наличии этого противоречия? Что нужно сделать, чтобы ликвидировать это противоречие? Для этого необходимо добиться того, чтобы догнать и перегнать технику развитых капиталистических стран. Мы догнали и перегнали передовые капиталисти-

[1] И. Сталин. Вопросы ленинизма, 1931, стр. 497.
[2] И. Сталин, op. cit., стр. 712.

ческие страны в смысле установления нового политического строя, советского строя. Это хорошо. Но этого мало. Для того, чтобы добиться окончательной победы социализма, нужно еще догнать и перегнать эти страны также в технико-экономическом отношении».[1]

Для осуществления этой жизненной задачи и необходимы быстрые темпы развития. Чтобы догнать и перегнать, т. е. пройти известное расстояние в нашем развитии, необходимо сократить, сжать время. Это овладение временем достигается при помощи высоких темпов, т. е. усиленного напряжения деятельности, воли, энергии, творчества, при помощи изменения и движения в пространстве, в материальном мире.

Овладение временем является одной из основных частей овладения природой, власти над ней человека. Во всех областях человеческой деятельности ведется борьба с природой. Наука открывает возможность управлять вегетационным периодом, сократить вегетацию при высеве зерна, поздние сорта сделать ранними, озимые — яровыми,[2] ускорить рост растений под воздействием ультра-фиолетовых лучей и применения токов высокой частоты. Усовершенствование способов передвижения и сообщения (радиосвязь, телевизия, воздушное сообщение и пр.) одинаково означает, как преодоление пространства, так и преодоление времени.

Перед наукой, наряду с задачей преодоления времени (и пространства) в смысле его сокращения и сжатия стоит и другая, чрезвычайно важная задача. Это — овладение теми процессами, которые совершаются в чрезвычайно малое время (в малые доли секунды) и которые вследствие этого недоступны нашему восприятию. Их приходится при помощи, так наз. «микроскопа времени» фиксировать и растягивать, т. е. увеличивать время во много раз, чтобы соответствующие события стали для нас доступны. Мы можем искусственно удлинять и укорачивать время путем ускорения и замедления материального движения.

Мы боремся с пространством и временем посредством движения, т. е. овладевая реальными процессами движения и изменения вещей, происходящими во времени и пространстве. Реальное содержание времени и пространства составляют материальные движения, процессы изменения. Говоря об ускоренных темпах нашего строительства, мы имеем в виду реальные процессы движения и изменения, которые должны быть осуществлены в пространстве в течение ускоренного, сжатого времени.

[1] И. Сталин, op. cit., стр. 498—499.

[2] См. доклад Н. И. Вавилова «Проблема северного земледелия». Тр. ноябрьск. сессии Акад. Наук СССР, стр. 262.

Время, стало быть, неразрывно связано с движением и пространством, являясь формой изменения и движения материи. Нельзя, следовательно, рассматривать время само по себе, изолированно от движущейся материи, как некую самостоятельную силу, наделенную творческой или разрушительной способностью, как это делает Бергсон, а за ним В. И. Вернадский.

Последняя часть работы акад. Вернадского посвящена вопросу о так наз. эмпирическом мгновении. «Философ Георг Зиммель», говорит он, «один из духовных властителей современной Германии, недавно перед смертью ярко выразил это субъективное значение времени для мыслящей личности: „Время есть жизнь, если оставить в стороне ее содержание“. Почти без изменения это выражение может быть сейчас применено к научной реальности».

Эти мистические формулировки вполне согласуются с его призывом к внутреннему, мистическому созерцанию и переживанию эмпирического мгновения. Погрузитесь в глубины вашей личности. Там вы обретете все богатство жизни. «В этом явлении микрокосмоса, для нашего сознания бездонного, мы подходим к длению нашей личности: сколько бессознательных и сознательных процессов переживает каждый из нас в ничтожную долю времени. Бывают мгновения в жизни каждого, когда это сознание явно и определенно».

Если «научная реальность» есть по внутренней сущности своей жизнь-дление, то эта сущность глубже всего познается и переживается через познание и переживание дления нашей личности, через мистическое созерцание нашей внутренней жизни. И именно в этом В. И. Вернадский видит «величайший перелом» современной научной мысли человечества. «Стоя на этом переломе», говорит он, «охватывая взором раскрывающееся будущее, мы должны быть счастливы, что нам суждено это пережить, в создании такого будущего участвовать. Мы только начинаем сознавать непреодолимую мощь свободной научной мысли, величайшей творческой силы, человеческой свободной личности, царство которой впереди. Оно этим переломом негаданно быстро к нам придвигается».

Старое миропонимание, по мнению акад. Вернадского, было чуждо живой человеческой личности. Новое миропонимание дает возможность построить мир без материи, в котором «реально существуют только личности, создающие и высказывающие научную мысль, проявляющие научное творчество — духовную энергию»,[1] как он писал в другом месте. В свете

[1] В. И. Вернадский. Мысли о современном значении истории знаний. Тр. Ком. по истории знаний. Л., 1927, стр. 6.

этих откровений и высказываемого им в той же работе упования на новый подъем религиозного творчества, становятся понятными и те надежды на «царство человеческой свободной личности», которые связываются им с новым «переломом» в научном миропонимании, одним из решающих звеньев которого является мистическое погружение в «эмпирическое мгновение», переживаемое личностью.

Мы далеко не исчерпали всего содержания работы В. И. Вернадского. Но уже из сказанного с полной ясностью следует, что под видом научного анализа «эмпирического обобщения» понятия времени нам преподнесли окутанное густым мистическим туманом «новое» религиозно-философское мировоззрение, согласно которому в мире обитают бесплотные духи («духовные начала»), существуют явления вне времени и пространства, и где свободная, творческая человеческая личность строит свое царство в мире «свободной научной мысли», путем мистического созерцания и переживания «эмпирического мгновения». Все мировоззрение В. И. Вернадского, естественно, глубоко враждебно материализму и нашей современной жизни, нашему социалистическому строительству.

В. И. Вернадский крайне недоволен теми, кто говорит о кризисе современной буржуазной мысли. «Мы переживаем не кризис, волнующий слабые души», говорит он, «а величайший перелом научной мысли человечества, совершающийся лишь раз в тысячелетия, переживаем научные достижения, равных которым не видели долгие поколения наших предков».

Мы показали, какое содержание акад. Вернадский связывает с «величайшим переломом научной мысли», как он использует научные достижения для «обоснования» аристократического индивидуализма и своего религиозно-мистического миропонимания. Своей работой о «Проблеме времени» он чрезвычайно ярко подтверждает глубочайший кризис, переживаемый буржуазной наукой, выражающийся в резком разрыве между великими достижениями науки и враждебным ей мистически-идеалистическим мировоззрением и методом исследования, которыми одухотворены подчас и крупные в своей специальности ученые. Преодоление этого гибельного для науки разрыва, устранение этого противоречия, оздоровление научной атмосферы, настоящий невиданный подъем научной мысли возможны лишь сознательным поворотом к философии диалектического материализма.

Переживаемый в настоящее время буржуазной мыслью — как научной, так и философской — глубокий кризис является идеологическим отражением всеобщего кризиса современной капиталистической системы и происходящей в ней ожесточенной классовой борьбы. Победа пролетариата в капиталисти-

ческих странах явится гарантией и необходимым условием дальнейшего расцвета науки.

Ярким образцом в этом отношении является СССР, где представители идеализма и мистицизма составляют уже ничтожное меньшинство. Дальнейший же рост нашего социалистического строительства, предстоящая во втором пятилетии окончательная ликвидация классов создадут все социальные условия для окончательного исчезновения религиозных, идеалистических и мистических воззрений.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

К ИЗУЧЕНИЮ БАКАЛЬСКИХ ЖЕЛЕЗОРУДНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НА УРАЛЕ[1]

Л. М. МИРОПОЛЬСКОГО

(*Представлено академиком* А. Е. Ферсманом)

Район Бакальских железорудных месторождений в геолого-минералогическом отношении представляет собой несколько обособленный участок на Урале, который быть может следует рассматривать как своеобразную замкнутую минеральную провинцию. Помимо концентрации типического комплекса железорудных минералов означенные месторождения служат также очагом конденсирования целого ряда минеральных ассоциаций — Cu, Pb, Ba, Mn, Mg и других химических элементов, находящихся в настоящее время в разнообразных генетических взаимоотношениях. В этом отношении Бакальские месторождения уже давно привлекали к себе должное внимание исследователей[2] и особо за последние 10 лет проф. А. Н. Заварицкого.[3] Но несмотря на это обстоятельство, а также и на то, что здесь уже около 100 лет ведутся разведки и разработки, естественно-историческая обстановка района в геологической литературе продолжает оставаться не совсем выясненной в деталях. В последнее время в связи с состоявшимся решением правительства о строительстве на базе Бакальских месторождений металлургического завода-гиганта, такое положение не может считаться нормальным. Интерес к нему должен резко измениться. В частности и проблема конкретного выяснения тех процессов, которым обязано возникновение месторождений, должна быть поставлена на ряду с другими

[1] Предварительный очерк по данным полевых работ 1931 г., составленный на 1 октября 1931 г.

[2] Я. В. Самойлов, Зап. Мин. общ., ч. 38, 1900, стр. 313 и ч. 39, 1902, стр. 329. Bull. de la Soc. de Natur. de Moskou, 1889, т. 14, стр. 142.

[3] А. Н. Заварицкий, Вестн. Геол. ком. № 4, 1925, 21 ст.

вопросами в центр внимания. Необходимо, наконец, иметь по этому вопросу точное представление, ибо без этого немыслима рациональная постановка геолого-разведочных работ, отбор наиболее эффективных методов опробования и обогащения и решение целого ряда других вопросов, а также и выбор в дальнейшем наиболее эффективной концентрации капитальных затрат. Исходя из этих соображений я и перехожу ниже к предварительному изложению полученных выводов за время летних работ 1931 г.

Район Бакальских железорудных месторождений расположен на западном склоне Урала между 28°20′ и 28°38′ восточной долготы от Пулкова и 54°50′ и 55°0′ северной широты и занимает верхнюю часть бассейна р. Бакала, левого притока р. Сатки, а также верховья рр. Буланки и Сильги, правых притоков р. Юрезани. Рельеф местности резко гористый. Средняя часть Бакала, что соответствует собственно Бакалу, в основных чертах представляет систему двух почти параллельных горных хребтов, с запада — Шуйды-Буландихи и с востока — Иркускан, разделенных друг от друга широкой полого-вогнутой долиной, параллельно которым на востоке тянется хребет «Сука̀» и на западе хребет «Сулея». На значительной части своего протяжения эти горы покрыты лесным покровом, из-под которого лишь в виде отдельных пятен выступают кореные породы, образующие изредка мощные высокие гряды — гирлянды, тянущиеся иногда почти параллельно друг к другу на расстоянии нескольких сот метров или распадающихся на ряд отдельных изолированных скал («Солонец», «Чертов палец», «Шихан» и др.).

В геологическом отношении средняя часть Бакальских железорудных месторождений — собственно Бакал — сложена главным образом осадочными и метаморфическими породами,[1] которым А. Краснопольский[2] и целый ряд последующих исследователей[3] приписывают нижне-девонский возраст Dg. Данные моих полевых работ не внесли каких-либо изменений в это положение, поскольку породы оказались в палеонтологическом отношении совершенно немыми, и таким образом новых достаточно устойчивых точек опоры для стратиграфии Бакала установить не удалось. Взаимное же соотношение отдельных пород между собою и их стратиграфия определяется очень легко, но пока исключительно на основании лишь литологических признаков и

[1] В геологическом строении Бакала кроме того принимают участие диабазы, но о них ниже будет сказано особо.

[2] А. Краснопольский, Изв. Геол. ком., 1901, т. 20, стр. 1—35.

[3] Л. Конюшевский и Ковалев, Тр. Геол. ком., н. с., в. 6, 1903. — П. Ковалев, Изв. Геол. ком., т. 20, 1901, стр. 411—434. — Л. Конюшевский, Изв. Геол. ком., т. 20, 1901, стр. 397—410.

последовательности их залегания. Петрографический анализ отдельных частей дает полное основание все наслоения Бакальской свиты разбить по литологическим признакам на 3 серии:

I. Нижнюю серию — толщу перемежающихся глинистых и песчано-глинистых сланцев (S_1).

II. Среднюю серию — толщу переслаивающихся известняков, доломитов, глинистых, известково-глинистых, песчано-глинистых сланцев (S — Ca).

III. Верхнюю серию — толщу кварцитов и кварцитовых песчаников с прослойками конгломерата и кремнисто-глинистых сланцев (Q).

В свою очередь среднюю серию из них согласно проф. А. Н. Заварицкому[1] можно дифференцировать по этому же принципу дальше на ряд звеньев (начиная снизу):

а) известняки-доломиты (Ca_1) (нижние),

б) глинистые, известково-глинистые, песчано-глинистые сланцы (S_2),

в) известняки-доломиты (Ca_2) (верхние),

г) глинистые, известково-глинистые и кремнисто-глинистые сланцы (S_3) с тонкими прослойками известняка.

Каждая из этих серий поочередно накладывается друг на друга. Целый ряд профилей А. Н. Заварицкого по отдельным месторождениям и по отдельным районам Бакала эту картину вполне подтверждает.

Анализ общего геологического сложения района Бакала показывает в полном согласии с предыдущими исследователями, что все серии пород Бакальской свиты в своем залегании к настоящему времени оказываются сильно нарушенными как пликативной дислокацией, так и дизъюнктивной. Горы Буландиха, Шуйда и Иркускан в сущности представляют собою большие размытые с поверхности антиклинальные части складок (с направлением СВ 15—25°), а широкие долины между Буландихой — Шуйдой и Иркусканом синклинальные части их. Каждая из этих частей вместе с тем является усложненной на своих крыльях очень сложной мелкой складочностью. В ряде мест складки кроме того оказываются разорванными поперечными и продольными сбросами с чрезвычайно колеблющейся амплитудой. На горе Иркускан замечаются также местами мелкие явления наволока (Ивановский рудник — большая выработка). Количество сбросов в разных местах Бакала чрезвычайно изменчиво, и пока констатируется для г. Буландихи 4 сброса (продольных), для г. Шуйды 2 (продольных) и для г. Иркускан 10, из них 6 продольных и 4 поперечных и

[1] А. Н. Заварицкий. Пояснительная записка к планшетам геол. съемки Бакальских месторождений 1924 г. (ркп.).

целый ряд более мелких. Большинство означенных сбросов вполне совпадает с указаниями проф. А. Н. Заварицкого.

В итоге обзора доступных в данное время к обозрению обнажений и искусственных выемок вытекает, что означенный покров Бакальской свиты к настоящему времени оказывается в той или иной степени измененным, далеко отошедшим от своего прообраза. Изучение образований связанных с изменением, а также изучение состава свежих и более измененных продуктов их заставляет отнести все это, с одной стороны, к действию гипергенных агентов (атмосферилий) и, с другой стороны, к действию гипогенных агентов (влиянию инъекции диабаза и действию гидротермальных растворов). Действие гипергенных агентов в общей схеме выразилось в удалении легко растворимых соединений и соответственном накоплении более устойчивых и менее растворимых. Судя по конституции и составу пород настоящего времени, можно утверждать, что разные части покрова подверглись этому влиянию в разной степени. Одни из них остались относительно свежими, другие подверглись более сильному изменению. При этом замечается, что наибольшие изменения претерпели те из пород, которые соприкасались в своем залегании со скоплениями грунтовых вод и которые содержали в себе больше включений сернистых соединений и органических веществ. Последние, окисляясь и выщелачиваясь, очевидно, своими продуктами воздействовали на соприкасающиеся с ними составные части пород и в той или иной степени изменяли их. Все это не могло не найти должного отражения в их теперешнем составе и строении. Не меньшие, а может быть и большие изменения произвели гипогенные агенты, эффект которых к настоящему времени выразился в разного рода метасоматозах, подчас совершенно мемоморфизирующих горные породы.

Хронологически эти изменения отвечают, повидимому, различным моментам истории существования каждой горной породы. Некоторые из них несомненно явления давно прошедшего времени, другие же наоборот совсем недавнего прошлого. Для того, чтобы подойти к более точному выяснению естественной истории всего Бакальского района необходимо учесть предварительно все, что в его строении является результатом этих процессов, только тогда со всей отчетливостью выступит его первоначальный облик. Этот беглый перечень соображений о литологическом строении района Бакала ставит довольно сложные требования по отношению к изучению естественной истории Бакальских железорудных месторождений. Необходимо произвести очень детальную обработку, чтобы каждый установленный факт стал действительно историческим документом для данного участка

земной коры, и тогда может быть можно будет получить некоторую базу для объективной обстановки всей истории образования рудных месторождений Бакала.

В настоящем очерке я позволю себе остановить внимание главным образом на изменениях гипогенного характера, обязанных в главной степени гидротермальным растворам, поднимавшимся с глубины, которые на мой взгляд, являются более ранними и по существу более важными в вопросе формирования Бакальских месторождений. Здесь уместно прежде всего поставить вопрос откуда шли эти растворы? Полевые наблюдения над месторождениями Бакала показывают локализацию всех без исключения месторождений к линиям нарушения — сбросам. К этим местам и приурочены максимальные изменения пород.

Эти оба факта заставляют считать, что проводниками растворов были трещины сброса, по которым гидротермальные растворы и поднимались. Достигая в пути карбонатных, а подчас и других пород, они производили в них целый ряд метасоматоз. Позднее на месторождения оказала не меньшее влияние инъекция диабаза, а затем и воздействие атмосферилий, продолжающееся и до наших дней. Если учесть все эти факты, то станет необходимым утверждать, что месторождения Бакала прежде чем воспринять свой настоящий облик пережили в своей продолжительной истории существования последовательно пять отдельных, отличных друг от друга, этапов формирования. К этим этапам я отношу следующие моменты в формировании месторождений:

1) Доломитизацию (обогащение карбонатных пород вдоль трещин сброса Mg путем замещения и перекристаллизации известняков).

2) Сидеритизацию (обогащение доломитов углекислым Fe путем замещения доломитов).

3) Минерализацию (обогащение сидерита сульфидами и целым рядом других рудных и нерудных минеральный ассоциаций).

4) Турьитизацию (декарбонитизация сидерита и дегидратация лимонитов с образованием малогидратной окиси Fe — турьита).

5) Лимонитизацию (гидратация сидерита и турьита с расщеплением и обособлением марганцевых и железистых соединений).

1. Этап доломитизации

Наличие ореола доломитов и доломитовых известняков вокруг многих рудных месторождений гидротермального происхождения уже давно в геологической литературе известно. Вместе с этим также давно подмечен и

тот факт, что на некотором расстоянии в стороны от месторождений доломиты обычно сменяются путем постепенных переходов более чистыми известняками. Наиболее раннюю характеристику таких переходов удалось проследить A. Schmidt'y[1] при изучении свинцово-цинковых месторождений ЮЗ Муссури. Гораздо позднее это же явление было установлено целым рядом других исследователей вокруг других гидротермальных месторождений Америки и Европы. Все выводы этих авторов можно свести в настоящее время к следующему основному положению.

Доломитизацию известняков вокруг гидротермальных месторождений следует считать 1) явлением весьма распространенным, 2) по времени образованием вторичным и 3) генетически тесно связанным с общим процессом оруденения.

В последнее время более глубокие исследования явлений доломитизации вокруг гидротермальных месторождений произвел D. F. Hewett[2] на ряде месторождений Америки, а также Европы (Raibe в Италии, Iglesias в Сардинии, в Верхней Силезии и др. месторождениях). При этом им установлено с исключительной очевидностью, что доломитизация известняков почти во всех случаях приводит к изменению: 1) окраски (от черного цвета известняков через серый к белому цвету доломитов, от кремового цвета известняков через желтые тона к красному цвету доломитов), 2) структуры (от тонкозернистой у известняков к крупно-кристаллической структуре у доломитов) и 3) порозности главным образом в сторону увеличения при переходе в доломит (у известняков Goodsprings порозность им определена от 0.36 до 1.49% и там же у доломитов от 1.69 до 3.20% и даже местами до 6%, 4) содержанию Fe, Si и Mn в сторону увеличения у доломитов (в известняках Goodsprings Fe следы, там же в доломитах до 0.26%). Последний пункт заставляет меня обратить на него особое внимание, ибо он позволяет рассматривать процесс доломитизации как фактор, благоприятствующий отложениям в некоторых случаях значительного количества Fe и Mn. И, действительно, просматривая литературу по этому вопросу, мне удалось обнаружить неопровержимые доказательства, что доломитизация предшествует не только отложению цветных металлов Pb и Zn (главным образом) и реже Cu (Cennecott, Goodsprings), но также образованию и скоплению сидерита. В этом отношении нужно считать весьма показательными районы Aspen, Red Cliff,[3] Alston Moor, Leadville district (Colorado),

[1] A. Schmidt, St. Louis Acad. of Sci. Trans., v. 3, 1875, pp. 246—252.
[2] D. F. Hewett, Ec. Geol., v. 23, № 8, 1929, p. 821.
[3] R. D. Crawford a. R. Gibson, Geol. Surv., Bull., 1925, p. 55—56, 75—79.

Silver City (Н. Мексика),[1] Pioche (Невада),[2] месторождения Африки,[3] где процесс доломитизации во всех случаях оказывается связанным с последующим отложением сидеритов (марганец-содержащих).

При более близком и всестороннем знакомстве с карбонатными породами Бакальских железорудных месторождений, к которым приурочены рудные скопления этого района, оказывается, что они являются в громадном большинстве случаев в той или иной степени доломитизированными. Для демонстрации этого факта я приведу два примера, первый из района рудника № 3 и второй из района рудника Ленинские выработки. В районе рудника № 3 карбонатные породы выходят вдоль всего южного борта рудника и частью в южном конце западного борта, переходя здесь постепенно в сидерит. Произведенные химические анализы карбонатных пород из разных мест этого рудника показали наличие доломитов только непосредственно у контакта с сидеритом, которые в сторону от них сменяются в начале в разной степени доломитизированными известняками, которые затем сменяются почти чистыми уже известняками. Все это в более конкретной форме видно из таблицы 1.

Табл

№№	Место взятия пробы	Химический состав								
		FeO	CaO	MgO	MnO	P_2O_5	$MnCO_3$	$FeCO_3$	$CaCO_3$	$MgCO_3$
1	Доломит у границы с сидеритом.	2.23	29.81	19.67	0.37	0.022	0.60	3.60	53.20	41.14
2	Доломитизированный известняк на 1 м к В от сидерита	3.47	27.76	18.80	—	0.45	—	5.59	49.45	31.11
3	Доломит со дна рудника на 3 м к В от сидерита	3.14	23.81	20.71	—	—	—	5.06	42.49	43.31
4	Доломитизированный известняк на 6 м к В от сидерита	1.62	33.84	14.21	—	—	—	2.61	60.38	29.72
5	Слегка доломитизированный известняк на 15 м к В от сидерита	1.64	50.94	3.61	—	0.028	—	2.69	90.91	7.54

[1] E. H. Wells, Nev. Mex. Sch. Min. Bull., № 2, 1918, p. 44.
[2] L. S. Westgate a. A. Knopf, Amer. Inst. Min. a. Mex. Eng. Trans., v. 75, 1927, 834.
[3] P. Geijer, Ec. Geol., v. 22, № 6, 1927, p. 537.

В 3-м анализе содержание Mg превышает содержание его в нормальном доломите.

Такая же картина в еще более резкой форме прослеживается и на карбонатных породах Ленинских выработок. Кроме того в этом районе удалось проследить явления доломитизации на значительном уже расстоянии, начиная от отдельных включений карбонатных пород в самой руде (Ленин. выраб. № 1, южная) и дальше по одному и тому же горизонту на запад включительно до доломитовых карьеров (названных очевидно по недоразумению) у ж.-д. линии.

В конечном результате этих опробований также оказалось, что породы близкие к доломитам лежат непосредственно только у руды, которые дальше сменяются вначале слабо доломитизированными известняками, а затем в самом большом удалении (у доломитового карьера) чистыми известняками с очень незначительным содержанием Mg. Кстати последний выдерживается в своем составе и гораздо южнее. Все это видно из табл. 2.

Таблица 2

№№	Место взятия пробы	Химический состав								
		MnO	FeO	CaO	Mg	P_2O_5	$MnCO_3$	$FeCO_3$	$CaCO_3$	$MgCO_3$
1	Доломит среди руды в восточном борту	0.178	1.01	26.90	19.22	0.015	0.288	1.64	46.01	40.20
2	Доломитизированные известняки из висячего бока рудного слоя	0.735	6.25	28.28	14.50	—	1.19	10.07	50.36	30.41
3	Доломитизированные известняки к З от выработки № 1	0.075	0.92	29.10	15.13	—	0.122	1.48	51.94	31.64
4	Известняк у доломитового карьера	0.070	0.17	54.83	1.24	—	0.123	0.27	97.86	2.60
5	Известняк в доломитовом карьере (по данным инж. Г. М. Мокшанова)	—	—	52.92	0.44	—	—	—	—	—

Из этих двух приведенных пока примеров вытекают следующие выводы:

1) Карбонатные породы непосредственно у рудных масс оказываются представленными доломитами или породами близкими к ним, которые по мере

удаления от руды сменяются в начеле в той или иной степени доломитизированными известняками.

2) Доломиты и доломитизированные известняки являются продуктами метаморфизации (метасоматоза) ранее бывших здесь известняков.

3) Охват этим процессом известняков Ca_1 и Ca_2 оказывается не везде одинаково выраженным, одни участки являются более сильно доломитизированными, другие гораздо слабее и совершенно им не затронутыми. Как закономерность подмечается, чем ближе известняки располагаются к рудной массе, тем сильнее выражены явления доломитизации и наоборот, чем дальше известняки удалены от рудных скоплений, тем этот процесс слабее. Только этим можно объяснить ту непостоянность в составе карбонатных пород, ту пестроту колебаний содержания в них Mg, Ca и Fe, которую мы наблюдаем в них вокруг Бакальских месторождений. Этим же объясняется та нечеткость в их определении, которую мы находим у прежних исследователей. В значительной мере этой же причиной объясняется колебание и неодинаковость внешних морфологических свойств карбонатных пород. При обзоре свиты Ca_1 и Ca_2 была замечена чрезвычайная пестрота морфологических свойств карбонатных пород, например, присутствие среди более темно-окрашенных карбонатных пород участков более светлых, а иногда участков мелкозернистых, даже плотных среди пород крупнозернистой структуры, и вообще большая невыдержанность признаков породы подчас на очень небольших расстояниях, что в громадном большинстве случаев затрудняет совершенно по внешним признакам определение породы, в результате чего пришлось отказаться от него и перейти к химическому определению их состава. Теперь на основании последних можно утверждать, что известняки при переходе в доломиты и доломитовые известняки становятся всегда: 1) более светло окрашенными (желтовато-серыми) 2) более плотными и реже мелкозернистыми и 3) более обогащенными Fe и Mg, чем исходный материал.

Интенсификация процесса и первоначальная конституция известняковой среды несомненно также имели свое влияние на конечный продукт доломитизации. Иногда этот этап, очевидно, достигал такой интенсивности, такой стадии, что в результате его получился почти чистый магнезит, установленный проф. А. Н. Заварицким в районе «Тяжелых рудников» или доломит с некоторым превышением Mg против нормального его содержания в доломите (см. анализ доломита из рудника № 3).[1]

[1] Исходя из характера процесса доломотизации имеется полная возможность выявления под месторождениями Бакала и в районе присутствия магнезита.

Самый же процесс доломитизации — процесс чисто метасоматический, который шел в прошлом обычным путем метасоматоза за счет более легко растворимого карбоната Ca с образованием чаще доломита и доломитизированного известняка или даже чистого магнезита. При таком суждении невольно напрашивается вопрос, откуда же могло появиться в растворах такое большое количество магния, чтобы превратить известняки в доломитовые породы и даже магнезит? В данном случае ответ на этот вопрос надо частично искать в самих известняках, как породах первоначально содержащих магний, хотя и в незначительном количестве, которые, изменяясь, освобождали прежде всего при замещении карбонат Ca, как более легко растворимый компонент, и соответственно этому обогащались Mg, как более трудно растворимым компонентом. При этом громадную часть карбоната Mg нужно считать все же принесенной извне в боковые породы.

Учитывая всю сумму фактов только что приведенных, а также степень выраженности следующей за доломитизацией фазы сидеритизации, мы приходим к выводу о прямой связи эффекта доломитизации с характером оруденения. Можно уже теперь утверждать, что чем сильнее выражена доломитизация вокруг месторождения, чем больше этим процессом охвачен участок, тем сильнее и будет оруденение в этом месторождении и, наоборот, чем меньше ореол доломитизации вокруг месторождения, чем слабее был выражен процесс доломитизации, тем меньше будет и оруденение. Переходя к фактам, мы действительно и видим, что площадь оруденения, например, Ленинских выработок очень ограничена и ореол доломитизации здесь выражен очень слабо, быстро переходя в периферии в неизменные известковые породы и, наоборот, в районе некоторых рудников Тяжелых мы наблюдаем почти полную доломитизацию известняков, почти полное отсутствие исходных первоначальных пород-известняков. Здесь и месторождения являются более крупными и зона их гораздо больше. Это необходимо учесть при поисковых разведках, и считать присутствие доломитов не только указателем на наличие руды, но, учитывая площадь распространения его, — и верным показателем размера рудоносной площади.

Таким образом, доломитизация есть лишь один из моментов изменения первоначально бывших здесь пород и притом моментов наиболее ранних, предшествовавших следующей за ним фазе сидеритизации, которая наложила особые черты на ранее бывшие здесь известковые породы. В некоторых местах Бакальских месторождений эти изменения настолько сильно выражены, что первичный облик и природа первоначальной породы совершенно стушевывается и с трудом распознается.

2. Этап сидеритизации

Этап сидеритизации, последующий спутник этапа доломитизации, известен как в крупных железорудных месторождениях (Туниса, Алжира), так и более мелких. Весь вопрос лишь в том, был ли какой-нибудь перерыв между этими двумя этапами или же они следовали непосредственно друг за другом, временами может быть даже накладываясь друг на друга. Мне кажется в Бакальских месторождениях этап сидеритизации был более поздним и временами даже может быть прикрывал собою предшествующий ему этап доломитизации. Лучшим свидетельством такого утверждения служат два факта:

1) Наличие доломитов или доломитизированных известняков, в той или иной степени сидеритизированных (по химическому составу близких бурому шпату) в приконтактовой зоне с сидеритом.

2) Самый химический состав сидеритов, которые, как видно из табл. 3, (стр. 582) во всех без исключения месторождениях Бакала содержат значительный процент магния.

Последний факт следует объяснять явлениями метасоматоза ранее здесь бывших и уже сформировавшихся доломитов или доломитизированных известняков, а отсюда и Mg в сидеритах считать реликтовым остатком предшествовавшей породы.

Факт первый важен тем, что он ставит под сомнение наличие в переходной стадии между сидеритом и доломитом зоны анкерита, присутствие которой очень часто указывалось для Бакальских месторождений некоторыми из предыдущих исследователей. Мне анкериты в этих условиях на Бакале найти не удалось и я считаю по ходу процесса оруденения присутствие его почти невозможным или во всяком случае очень и очень редким. Кроме того, следует отметить такую характерную особенность сидеритов Бакала как обычное присутствие в них марганца (см. анализы сидеритов), что позволяет относить их к типу «manganiferous» подобно сидеритам близких по генезису месторождений Бильбао и африканских. Этот момент я считаю обязанным привносу углесоли марганца в гидротермальных растворах вместе с углесолью железа. В дальнейшем изложении, как мы увидим ниже, марганец будет играть очень существенную роль в геохимии месторождений.

Морфологические и структурные свойства доломитов и доломитизированных известняков при замещении сидеритом также, как и при доломитизации резко менялись, но как-будто бы прямо противоположно тому, что

Таблица 3

№№	Место взятия пробы	Химический состав								
		MnO	FeO	CaO	MgO	P_2O_5	$MnCO_3$	$FeCO_3$	$CaCO_3$	$MgCO_3$
1	Рудник № 3, западный борт, юго-западный угол, сидерит серого цвета	—	42.77	0.92	10.53	—	—	68.97	1.64	22.04
2	Рудник № 3, западный борт, сидерит сеповато-желтый	3.19	43.12	0.22	9.49	—	5.17	69.3	0.39	19.86
3	Рудник Гаевские ямы, северн. борт, сидерит серый (крупно-зернист.)	2.40	46.45	нет	8.26	нет	3.89	74.90	нет	17.27
4	Рудник Гаевские ямы, северн. борт, сидерит серый, (мелко-зернистый)	1.65	48.13	нет	9.36	0.012	2.67	77.61	нет	19.59
5	Группа Тяжелых рудников, Безымянная яма (посредине выработки)	3.22	43.30	0.58	10.24	0.019	5.21	73.11	1.04	21.41
6	Ельничный рудник, восточный борт в разрезе	3.55	41.20	1.46	10.28	0.012	5.75	66.43	2.61	21.50
7	Рудник № 3, западный борт, сидерит горохово-желтый (из полостей)	—	48.31	0.59	9.54	—	—	77.90	1.05	19.95

мы видели при доломитизации: окраска сидерита стала более темной по сравнению с доломитами и доломитизированными известняками (серовато-желтой или просто серой) структура — более крупнозернистой. Несколько особняком по окраске стоит сидерит, выделившийся в полостях и трещинах серого сидерита, который во всех случаях характеризуется более светлым гороховожелтым цветом и ясно крупнозернистым кристаллическим строением. Иногда при неполном выполнении полостей этот сидерит образует ясные многогранники тупых ромбоэдров. Образование его я причисляю к той же генерации сидерита, но только выделившейся при несколько иных условиях. H. Quiring[1] при описании сидеритов месторождения Erzberg'а

[1] H. Quiring, Ztschr. f. prakt. Geol., 1929, H. 10, S. 179.

близкого по некоторым чертам генезиса с Бакалом, также обособляет две разности — серую и желтую и также считает их одновременной генерацией. Другие исследователи K. A. Redlich и H. Haberfelner видят разницу во времени их образования и относят желтый сидерит к более поздней генерации.

Таким образом, этап сидеритизации последующий и главный момент изменения пород в Бакальских месторождениях произошел также за счет метасоматоза их и в конечном итоге привел к образованию первичных руд. Но этим формирование месторождений Бакала не закончилось. Дальше следовал третий этап — минерализации.

3. Этап минерализации

Этот этап обязан в своем образовании тем же гидротермальным растворам, которые произвели доломитизацию и сидеритизацию и которые в конце концов привели к обогащению месторождений Бакала сульфидами Cu, Pb и Fe и целым рядом других химических элементов (в частности Ba). Этап минерализации известен и в других близких по генезису месторождениях сидерита (Бильбао, Алжира, Туниса, Марокко, Эрцберга) и во многих из них он также является этапом последующим, на что между прочим указывает P. Geijer[1] для африканских месторождений. Таким этот этап был и для Бакала, чему основным доказательством служит обычное выделение минеральных ассоциаций в полостях и трещинах сидерита, как образования более раннего, которое они обычно собою прикрывают.

А. Н. Заварицкий[2] при описании парагенетеческих взаимоотношений различных минеральных ассоциаций Бакала разделяет их на 2 группы: 1) кварц — сульфиды (пирит и халькопирит) и 2) барит — железный блеск.

При этом он особо подчеркивает, что «кварц с сульфидами и барит обычно встречаются раздельно и отчасти даже в разных участках месторождений. Распространенностью кварца отличается северная группа Успенских рудников, также Гаевская яма в группе Тяжелых. Барит очень распространен в средней части Успенских рудников». Правда, немного спустя А. Н. Заварицкий добавляет, что «в немногих пунктах все упомянутые минералы встречены совместно и здесь совершенно ясно, что барит и сопровождающий его железный блеск являются позднейшими, чем кварц и сульфиды, минералами, наростая на них снаружи». И дальше «наконец,

[1] P. Geijer, Ec. Geol., v. 22, № 6, 1927, p. 557.
[2] А. Н. Заварицкий, Вестн. Геол. ком., № 4, 1925, стр. 22.

как еще большая редкость в полостях» на барите встречены «нежные игольчатые кристаллы и ручки кристаллов аргонита».

В результате всех наблюдений А. Н. Заварицкий намечает для Бакальских месторождений следующие «генерации минералов гипогенного происхождения: 1) сидерит, 2) кварц и частью анкерит и бурый шпат с сульфидными рудами, 3) барит с железным блеском и может быть сюда же относится голенит, 4) арагонит...».

Мне же в результате обзора всех минеральных ассоциаций гипогенного характера в Бакальских месторождениях картина кажется несколько иной.

Во-первых, нет той закономерной последовательности двух групп парагенетических ассоциаций, о которых говорит А. Н. Заварицкий, так как очень часты случаи, где мы имеем все минералы совместно выделившимися в известной последовательности (рудн. № 3). Во-вторых, нет той закономерности в последовательности генераций, на которую указывает А. Н. Заварицкий.

На основе наблюдений я решаюсь утверждать для Бакальских месторождений следующую зональную последовательность начиная с более ранней:

1) Первую карбонатную зону [бурый шпат — доломит — анкерит (с Mg].

2) Сульфидную зону (пирит — медный колчедан и сюда же может быть следует относить свинцовый блеск) (последний установлен лишь в одном пункте г. Иркускана без всяких спутников).

3) Барито-кварцевую зону (барит — железный блеск — кварц).

4) Вторую карбонатную зону (арагонит — кальцит — халцедон).

Повидимому два последних уже следует относить к гипергенным образованиям.[1]

При этом я подчеркиваю, что такую смену генераций я наблюдал полностью лишь в руднике № 3. Гораздо же чаще в месторождениях мы находим отдельные звенья этой цепи, прерванные в своем образовании, где целый ряд минералов благодаря этому оказывается совершенно отсутствующим. Имеются, наконец, и такие месторождения, где вообще зоны минерализации нет (Буландинский рудник) или встречаются лишь следы ее (рудники Бакальчик — Вагонные ямы). Это навело меня на такие мысли: нельзя ли рассматривать имеющиеся выходы зоны минерализации в месторождениях (где она ясно выражена) как конечные части — хвосты этого этапа, которые только в некоторых месторождениях оказались обнаженными

[1] Сюда не входят минералы связанные с интрузией диабазов и минералы гипергенного происхождения.

имеющимися выработками, а в других они лежат глубже или под самыми месторождениями или где-нибудь в периферии их? А отсюда, нельзя ли по аналогии с месторождениями близкими по генезису (где имеются месторождения цветных металлов), ждать в районе Бакала на глубине или на периферии концентрации цветных металлов, в частности меди? И нет ли каких-либо данных на этот счет? Эти вопросы предыдущими исследователями совершенно не поднимались и дать на них ответ в настоящее время пока еще трудно, так как нет под руками пока еще достаточно устойчивых данных. Но все же кое-какие указания в этом отношении как-будто намечаются: 1) самая аналогия сопоставления Бакала с месторождениями близкими по генезису, где заведомо известны цветные металлы, как-будто бы служит некоторым залогом возможности нахождения их и на Бакале, 2) наличие в месторождениях Бакала выходов лишь верхних частей зоны минерализации указывает на то, что корни ее уходят вглубь и, наконец, 3) некоторые данные пока еще отдельных буровых скважин как-будто бы показывают увеличение содержания сульфидов и их спутников на глубину.

На самом деле, мы имеем, например, пирит в поверхностных частях лишь в виде отдельных вкрапленников, большей частью в форме ясно образованных кристаллов и их сростков; на глубине же мы уже встречаем пирит в виде скоплений, зернистых аггрегатов с массивным сложением, при проходке которых скважины дают керн в 10 см (скваж. № 28 на Иркускане) и более, до 20—30 см (скваж. № 91, № 92 на Буландинском руднике). То же самое установлено в отношении барита. В поверхностных частях месторождений барит дает обычно небольшие скопления (исключение составляет выход барита в западном борту рудника № 4), тогда как на глубине одной скважиной в районе рудников пройдено баритом около 6 м. Правда эти факты пока еще мало убедительны в виду своей малочисленности. Но если даже случится так, что концентраций сульфидов цветных металлов заслуживающих внимания в районе месторождений найти не удастся, то все же намечающееся увеличение сульфидов книзу необходимо учесть с другой стороны (на что я и обращаю внимание руководителей Бакальского рудоуправления), именно со стороны влияния их на самое качество руды в сторону возможного повышения содержания серы.

Заканчивая этап минерализации, я считаю, что он произошел при несколько иных термодинамических условиях, чем первые два этапа. Мне кажется, что этапы доломитизации и сидеритизации протекали при относительно низкой t° (порядка интервала 50—70°), этап же минерализации — при более повышенной t° (порядка интервала 150—200°), а может быть

даже и несколько большей, которая к концу процесса стала понижаться. С завершением этапа минерализации месторождения Бакала получают полное формирование, как месторождения метасоматического типа, обязанные гидротермальным растворам. В более общих чертах такой взгляд на генезис Бакальских месторождений высказал еще покойный Я. В. Самойлов и позднее его подтвердил А. Н. Заварицкий.

4. Этап турьитизации

Однако, этим формирование месторождений Бакала нельзя считать законченным. Оно после пережило еще два этапа (турьитизацию и лимонитизацию), которые в свою очередь сильно изменили месторождения, как образования метасоматического типа. При этом оба последующие этапа наложили на месторождения столько новых черт и таких важных, что значительно изменили общую физиономию их и теперь эти месторождения приходится рассматривать в несколько ином свете. В этом отношении я прежде всего отвожу главную роль инъекции диабазов.

Г. М. Мокшанов, геолог Бакальского рудоуправления, считает, что инъекций диабазов на Бакале было две: одна более древняя и другая — более поздняя. В качестве подтверждения этого он выставляет между прочим два признака: 1) различные условия залегания жил диабазов и 2) различную их сохранность.

По его мнению жилы диабаза древней инъекции всегда более разрушены и обычно имеют пластовый характер залегания, тогда как жилы диабаза более поздней инъекции почти всегда секущие и характеризуются более свежим habitus'ом.

Из сопоставления многочисленных случаев выходов жил диабаза в районе Бакала оказалось, что оба эти довода по целому ряду причин не могут считаться убедительными. Во-первых, условия залегания одной и той же жилы не всегда выдерживаются. Нередки случаи, когда жила диабаза из пластовой становится секущей. Так, например, жила диабаза в восточном борту рудника Бакальчик идет в начале согласно напластованию, а затем в южном борту становится секущей, то же самое наблюдается на жиле диабаза в руднике № 4.

Во-вторых, понятия «свежести» и «измененности» для разных жил диабаза в условиях Бакала не могут считаться вообще устойчивыми признаками. Этот критерий безусловно чаще определяется не возрастом, а зависит в своем существовании от целого ряда других причин: от мощности самой жилы, от условий ее нахождения (у поверхности или на глубине)

от окружающей среды (например, в турьитах жилы диабаза всегда более разрушены, у известняков и доломитов — всегда более свежие) и в целом от той геологической обстановки, где они наблюдаются. Наконец, просто стоит учесть следующие факты, как они убеждают нас в противном. Например, секущая жила дибаза в западном борту (верхний уступ) рудника Тяжелого (Безымянные ямы) оказывается более измененной, нежели жила диабаза в самой выемке, хотя последняя и является пластовой, тоже самое секущая жила диабаза в восточном борту рудника № 4 оказывается также сильно измененной, как и пластовая жила в той же выемке. И наоборот, пластовая жила в Безымянной яме будучи вообще сильно измененной, у доломита оказывается по внешнему виду очень свежей. Мне думается, что оба принципа, положенные Г. М. Мокшановым для заключения о двух инъекциях диабазов в районе Бакала, не имеют под собой еще достаточно веских оснований. Разгадку их нужно искать, конечно, в составе самих диабазов. Но этим вопросом я к моменту составления очерка заняться не мог. Если же только исходить из фактов полевых наблюдений, то более правдоподобным будет считать для Бакала одну инъекцию. И судя по тому, что большинство жил имеет тенденцию ветвиться по направлению к югу и в этом же направлении чаще выклиниваться, можно думать, что инъекция диабазов шла откуда-то с севера. Конечно, при своем движении диабазовая магма, попадая в различную геологическую обстановку, могла частью вклиниваться между наслоением пластов, а частью там, где это было более доступно, сечь таковые и по другим направлениям. При этом, вполне естественно, что в поступательном движении магмы могла создаться некоторая разница в ходе и отсюда в результате могло получиться их взаимное соприкосновение друг с другом и даже взаимное пересечение. Эту картину действительно мы и наблюдаем в руднике № 4 у восточного борта и в руднике Тяжелом (Безымянная яма) в западном борту, где пластовые и секущие жилы в обоих случаях взаимно пересекают друг друга.

Оставляя окончательное суждение по всем этим вопросам до окончательной обработки материала, я хотел бы здесь только подчеркнуть другую и более важную роль диабазов в Бакальских месторождениях — это влияние их на руду в том случае, когда жилы диабаза, безразлично секущие или пластовые, при своем движении проходили через нее. Это влияние на мой взгляд было громадным и оно совершенно метаморфизировало облик первичной руды, а также и ее спутников. Причиной этого была высокая t° диабазовой магмы, которая создавала иные термодинамические условия в окружающей среде, а отсюда должна была вызвать и иные стадии равно-

весия. Конечно, в разных местах месторождений в этом отношении мог быть целый ряд отклонений в зависимости от того 1) какая масса диабазов инъекцировала в месторождение и 2) в какое время самого процесса она инъекцировала. Могло случиться, что магма прежде чем попасть в месторождение в своем движении прошла уже большое расстояние и лишь в конце своего поступательного движения вступила в него. В этом случае эффект ее воздействия должен быть один, ибо t° ее стала несколько ниже, чем у первоисточника, — где эффект должен быть другим. Вместе с этим менялся также и самый характер процесса метаморфоза в зависимости от того, в руду какого состава инъекцировала магма. Наблюдения показывают, что в том случае, когда диабаз проходил через сидерит, весь этот процесс сводился к декарбонитизации и частичной гидратации его с образованием малогидратной окиси Fe — турьита. Подтверждением этому служат многочисленные псевдоморфозы турьита по сидериту. Если же на пути движения магма встречала лимонит, то происходила дегидратация опять таки с образованием той же малогидратной гидроокиси Fe — турьита. Как видно, в обоих случаях изменения получался турьит, поэтому я и называю этот этап турьитизацией. Поскольку же это наложило на первичные руды очень большой отпечаток, местами совершенной метаморфизирующий их, и поскольку в этом случае главную роль играла исключительно высокая t° диабазов, я и считаю Бакальские месторождения не просто метасоматическими, а метаморфическими, и в частности пирометаморфическими. Степень метаморфизма Бакальских месторождений во всех случаях оказывается прямо пропорциональной количеству жил диабаза и их массе инъекцированной в месторождения. И, действительно, месторождения сидерита, куда позднее инъекцировало много жил диабаза в настоящее время почти целиком превращены в турьит (напр. рудник № 4, 2, 1 и др.) и наоборот месторождения сидерита, где мало жил диабаза или же, где они проходят одной стороной месторождения, там и турьита соответственно меньше, а если они есть, то только в той стороне, где проходят эти жилы, а в противоположной сидерит как таковой сохранился в полной неприкосновенности или же изменился очень слабо, давая в последнем случае целый ряд переходов в турьит. Разительным примером этого является рудник № 3, где турьит имеется лишь у жил диабаза в восточном борту, а в западном борту сидерит остался почти без изменения. То же самое и на руднике Бакальчик, где жила проходит в восточном борту, так около нее и установлен турьит, к западному же борту он постепенно сменяется сидеритом, частью уже перешедшим в недавшем прошлом в бурый железняк. Количество примеров

иллюстрирующих прямую зависимость метаморфизации сидерита от массы инъекцирующих жил можно было бы еще значительно увеличить. При этом замечательным во всех случаях оказывается то, что интенсивность метаморфизации рудного тела обычно всегда уменьшается по мере удаления от жилы и особенно сильной оказывается тогда, когда влияние этого фактора подкрепляется еще близостью сланцев (висячего или лежачего бока, безразлично). В этом случае действительно создается впечатление условий напоминающих искусственный обжиг. Для большей убедительности необходимо отметить, что явления пирометаморфизма подверглись и другие спутники сидерита, в частности пирит, который так же, как и сидерит в этих условиях оказывается обожженным, показывая переход в турьит. Иллюстрацией к этому служат великолепно сохранившиеся псевдоморфозы турьита по пириту в руднике № 4. Кроме того, сюда следует отнести также и явления обжига барита в турьитах рудника № 3 и № 4 и обжига лимонита, который вероятно уже к тому времени в месторождениях Бакала был. Ибо мне пришлось установить целый ряд образцов сталактитов бурого железняка, корок бурого железняка, совершенно превращенных к настоящему времени в турьит, а местами даже в красный железняк, (В. Булонский рудник, группа Ивановских рудников и др.), и вместе с тем ряд образцов показывающих всевозможные переходы этих изменений. Все это, мне кажется, можно объяснить лишь изменением температуры среды. Последний момент вместе с тем как-будто указывает и на то, что был некоторый интервал между предшествовавшими этапами формирования Бакальских месторождений и этапом турьитизации. Но характеристика этапа турьитизации как процесса метаморфизма была бы не полной, если бы не учесть влияния тех составных частей (CO_2 H_2O и может быть SO_2), которые отдавались рудой и ее спутниками в результате их изменения. Отдача этих агентов с свою очередь должна была оказать обратное и очень сильное воздействие на самые жилы диабаза и безусловно степень измененности их всегда оказывается обусловленной количеством метаморфизированного тела. Здесь должна быть прямая зависимость: чем больше метаморфизировано рудное тело, тем больше получалось в окружающей среде диабаза CO_2, H_2O и SO_2 и тем больше должен быть эффект их воздействия на диабаз и последний отсюда должен быть сильнее изменен в этих условиях. Иначе нельзя и мыслить, поскольку в литературе согласно экспериментальным данным E. Moore'а и J. Maynard'а[1] и др. более ранних исследователей известно, что CO_2 в условиях присутствия H_2O является одним из эффектив-

[1] E. Moore a. J. E. Maynard, Ec. Geol. v. 24, № 3, 1929, p. 272.

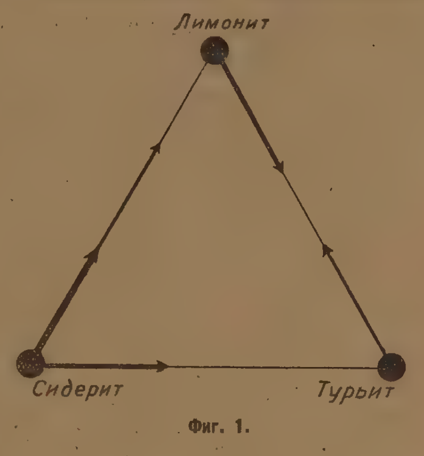
ных агентов разрушения силикатных составных частей, т. е. как раз тех составных частей, из которых состоят диабазы. В очень многих случаях именно этой причиной следует объяснять изменения диабазов в Бакальских месторождениях, а не возрастом инъекции, как это думает Г. М. Мокшанов. Таким образом, получалась картина обратного взаимодействия диабаза на сидерит и другие спутники его и этих последних — на диабаз. Месторождения, сформировавшиеся полностью после инъекции диабазов, продолжали, однако, подвергаться атаке атмосферилий, в результате чего должны были вступить в следующий этап изменения — лимонитизацию.

5. Этап лимонитизации

Этот этап, начавшийся давно, Бакальские месторождения переживают и в настоящее время. Весь процесс его сводится к следующему: 1) гидратации сидерита, оставшегося неизмененным турьитизацией, и турьитов под влиянием действия атмосферилий (атмо- гидро- и биосферы) с образованием лимонита, как более устойчивой формы равновесия для Fe в этих условиях, и 2) к расщеплению и обособлению при этом друг от друга гидроокислов железа и гидроокислов и окислов марганца.

В разных местах месторождений результаты этих изменений выражены по разному. В одних месторождениях, как например, рудник Тяжелый № 1, Безымянная яма (в группе Тяжелых рудников), Буланский 1-й и 2-й мы наблюдаем турьит относительно свежим или слегка затронутым этими процессами. Местами здесь даже находим «эмбрионы» этих процессов. Тоже самое замечается и в отношении сидерита, который в некоторых местах остается свежим или слегка измененным у поверхности или с боков (в особенности у трещин сброса). Сюда относятся рудники: Гаевская яма и частью № 3. Но на ряду с этим имеются и такие месторождения, в которых процесс лимонитизации зашел очень далеко, как например, рудники Бакальчик, Вагонная яма, Ленинские выработки, Буландинский, №№ 5, 6. Во всех этих пунктах руда, по крайней мере, в доступных наблюдению местах очень сильно изменена. Но гораздо больше встречается участков, в которых этот процесс не закончился и где сидерит и турьит находятся в различных стадиях изменения. При этом удается с исключительной ясностью проследить все переходы процесса. Например, на руднике № 4 (Западный борт) видно, как на фоне турьита начинают появляться желтые пятна лимонита и скопления более темных по окраске марганцевых соединений, которые в дальнейшем продолжая изменяться, концентрируются все отчетливее, совершенно обособляются друг от друга

и, наконец, происходит полное их расщепление. Главная масса турьита переходит в кавернозный лимонит, а марганцевые соединения или выделяются в его кавернах в виде корок, налетов, или же, частью захватываются лимонитом и остаются в его составе. Та же картина изменения, но менее рельефно, наблюдается и при изменении сидеритов. Однако, все это происходит по месторождениям крайне неравномерно и выражено чрезвычайно пестро. Иногда на каком-нибудь квадратном метре мы имеем все возможные стадии этих переходов. Это создает крайнюю пестроту состава руды, а отсюда методы опробования и обогащения ее должны быть более дифференцированными при подходе к каждому отдельному руднику, к каждому отдельному участку, чем мы это видим на самом деле.



Фиг. 1.

Из всего вышеизложенного генетическое взаимоотношение разных рудных компонентов, составляющих рудное тело Бакальских месторождений, представляется возможным очень наглядно изобразить на плоскости равнобедренного треугольника (см. фиг. 1). Сидерит, как первичный и исходный рудный компонент помещаем в левом углу треугольника. В свое время, в интервал между 3 и 4 этапами, сидерит подвергся частичному изменению в лимонит. Точку, ему соответствующую, отводим в верхнем углу треугольника и стрелка показывает на левой стороне треугольника направление процесса изменения сидерита в лимонит. Позднее в Бакальских месторождениях происходит инъекция жил диабаза. При этих условиях сидерит и, частью уже появившийся, лимонит оказываются соединениями неустойчивыми и каждый из них получает импульс к изменению в турьит. Соответствующую ему точку обозначим в правом углу треугольника и стрелка на правой и нижней сторонах его показывает ход процесса изменения сидерита и лимонита в турьит. В этих условиях последний оказывается наиболее устойчивой стадией равновесия рудного вещества и месторождение успокаивается. Но начинается воздействие гипергенных агентов (атмосферилий). При вновь возникших условиях сохранившийся от турьитизации сидерит, а также и сам турьит вновь становятся неустойчивыми и каждый из них начинает изменяться в более многоводную гидроокись

железа — лимонит (частью и гетит), как соединение наиболее устойчивое в настоящее время в поверхностных частях литосферы. Процесс благодаря этому получает как бы обратный характер. Стрелка фиксирует по правой и левой сторонам треугольника направление этого нового процесса. Последний процесс на Бакале не закончился. Полной нивеллировки пока еще нет.

Несколько особняком от всего этого стоит лимонит, который образовался и продолжает развиваться за счет изменения глинистых сланцев (Тяжелый рудник № 2 и № 3).

Таким образом, суммируя все вместе, необходимо считать, что Бакальские месторождения прежде чем принять современный habitus прошли последовательно четыре стадии формирования: 1) доломитизацию, 2) сидеритизацию, 3) минерализацию и 4) турьитизацию и, наконец, теперь еще переживают пятый этап — лимонитизацию. Первые три этапа в своем возникновении обязаны гидротермальным растворам, поднимавшимся из глубины вдоль трещин нарушения — сбросов, которые в конце концов придали Бакалу метасоматический тип. Четвертый этап обязан инъекции диабазов, главным образом их высокой t°, которая метаморфизировала месторождения и придала им пирометаморфический характер. Последний этап — лимонитизация — это процесс настоящего времени, который еще продолжается и идет под влиянием атмосферилий.

Переводя эти выводы, как известного рода предпосылки, на прикт ическую базу Бакала, где основным вопросом сегоднешнего дня является форсирование геолого-разведочных работ, можно формулировать их следующим образом.

1) При поисковой разведке следует ориентироваться: a) на линии сбросов, где таковые проходят через карбонатные породы (указатель руды, поскольку линии сбросов служат проводниками рудоносных растворов); b) на доломиты, как признак близости зоны оруденения (доломиты обычно образуют ореол вокруг рудного тела); c) на места концентрации жил диабаза в рудном теле, как на указатель наличия руды лучшего качества — турьита (турьит получается под влиянием диабазов).

2) При детальной разведке следует ориентироваться на присутствие этапа минерализации в особенности на глубине, как на указатель, с одной стороны, ухудшения качества руды (на содержание серы), с другой стороны, — выявления возможной концентрации сульфидов цветных металлов могущих иметь промышленное значение.

Но все это можно проводить в жизнь только в том случае, если будет правильное представление о форме самого рудного тела.

До последнего времени очень часто считали, что Бакальские месторождения имеют пластообразную форму залегания рудного тела. Соответственно этому был выработан и план геолого-разведочных работ по Бакалу. Лучшим доказательством этого может служить план разведок текущего лета на г. Иркускан. Однако, предпринятые мною наблюдения убедили меня в неустойчивости такого взгляда. В начале же лета я вынужден был признать, что пластообразный характер рудного тела на Бакале, если и наблюдается, то только в рудниках Бакальчик — Вагонные ямы — Буландинский и частью на некоторых других рудниках. Тогда как во всех остальных рудниках форма рудного тела должна быть охарактеризизована как ясно гнездообразная. Сюда я причисляю: Ленинские выработки, группу Тяжелых рудников, Буланские рудники, группу Ивановских, Александровские рудники, группу Ельничных, Гаевскую яму и частью рудник № 3. Во всех этих местах руда хотя и залегает по пласту, но в виде отдельных неправильно очерченных гнездообразных масс. В абсолютном большинстве случаев здесь руда в своем залегании среди карбонатных пород постоянно перемежается с пустыми породами. Нередки случаи, когда руда обнаруживается в виде неправильных участков ниже известняков и последние ее покрывают и наоборот, часто руда к низу и в периферии сменяется пустой или частью оруденелой породой, оставляя среди себя реликты прежних пород. Эту картину во всех ее проявлениях видно на Ленинских выработках и в ряде мест г. Иркускан даже с поверхности (участок между В. Буланскими рудниками и район Ивановских рудников). Можно наблюдать ее и на естественных обнажениях по отдельным рудникам) напр. южный борт В. Буланского № 1, Ленинские выработки (южная зарезка).

С генетической стороны гнездообразная форма Бакальских месторождений обусловлена двумя причинами: 1) первичным характером оруденения — метасоматозом, который в своем ходе вполне естественно мог замещать в ряде случаев пласт не целиком, а лишь в отдельных участках его, где растворы находили себе больше доступа; 2) тектоническими нарушениями пластов карбонатных пород и пород их прикрывающих, которые при этом перемешиваясь, позднее подверглись выборочному оруденению (В. Буланский рудн. № 2).

Результатом этих выяснений было изменение плана ведения разведки на г. Иркускан. Пройденные же скважины полностью высказанный мною взгляд подтвердили.

Заканчивая, я хотел бы напомнить, что все эти выводы лишь результат летних полевых работ.

Казань.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 3 руб.